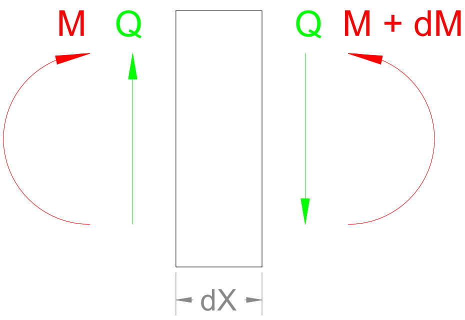
Teoría de Jourawsky

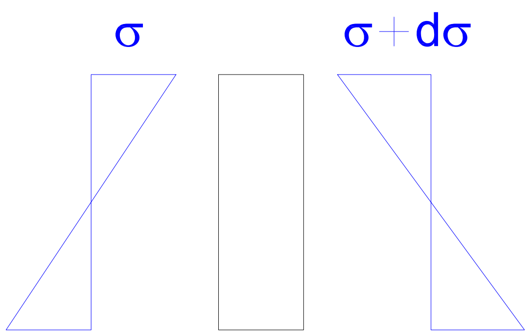
La teoría de barras, utilizando la hipótesis de Bernoulli, no llega un valor razonable para las tensiones tangenciales 'τ', debido a que al suponer que las secciones planas se mantienen planas estamos implicando que no tiene alabeo. El alabeo es generado por justamente por la distribución de las 'τ', por lo cual esta hipótesis genera que las 'τ' que saldrían directamente de un análisis usando la teoría de barra no son adecuados. Las tensiones longitudinales 'σ' si llegan a un resultado adecuado, entonces usaremos estas 'σ' para calcular las 'τ', que es justamente lo hace la teoría de Jourawsky.

Las 'σ' fueron calculamos usando la teoría de flexión, por lo cual las hipótesis iniciales para la teoría de Jourawsky son las mismas que flexión:
- Bernoulli, Hooke, y por ende Navier
- El elemento puede ser considerado una barra (una dirección mayor a las otras por lo cual se puede representar por un eje)
- De eje recto
- Vale el principio de Saint-Venant

Por equilibrio de una franja diferencial se puede deducir que $Q \cdot dx = dM$ (según otra convención puede quedar con un menos esa relación)



Los momentos generan 'σ' como vimos en flexión. Entonces tenemos de ambos lados diagramas de 'σ' cuyo eje neutro pasa por el baricentro (el eje neutro de una flexión no compuesta en régimen elástico es siempre baricentrico).

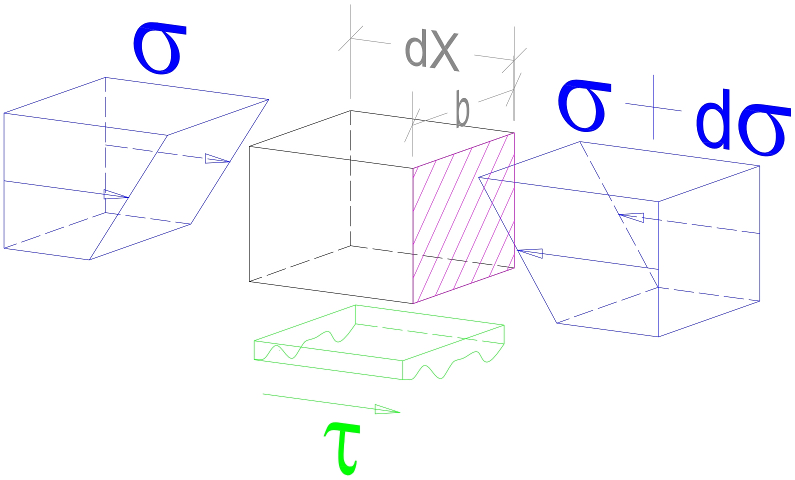


Ahora tenemos que hacer equilibrio. Se puede ver en primer lugar que:

$$\int \tau \, dA \cdot dx = Q \cdot dx = dM = \int d\sigma \cdot y \, dA$$

Lo que cumple las ecuaciones de equivalencia.

Lo que nos faltaría hacer es encontrar la distribución de las 'τ', y para hace esto vamos a plantear el equilibrio de un sector de nuestra sección.



El 'σ' de la derecha se equilibra con el 'σ' pero falta equilibrar al 'dσ'. Nos falta alguna tensión más para el equilibrio. Lo que equilibra justamente estas fuerzas son las 'τ'.

La integral de estas tensiones 'σ' en la sección que resbala (la rayada magenta) es:

$$\int (\sigma + d\sigma)\, dA - \int \sigma\, dA = \int d\sigma\, dA = \int \frac{dM \cdot y}{I}\, dA = \frac{dM}{I} \cdot \int y\, dA = \frac{Q \cdot dx}{I} \cdot S$$

Donde la variable 'y' es la distancia al eje neutro (el cual es baricentrico) por lo cual el 'S' es el momento estático del área que resbala (la magenta) respecto al baricentro de la sección.

Este valor que acabamos de calcular es una fuerza que deberá ser equilibrada por la integral del diagrama de las 'τ' en el área del fondo del cubo dibujado. Esta es igual a:

$$\int \tau\, db \cdot dx$$

Igualando las dos ecuaciones, y cancelando el 'dx' que esta en ambos términos llegamos a:

$$\int \tau\, db = \frac{Q \cdot S}{I}$$

Valor conocido como **flujo cortante**. Este valor es exacto, si tomamos como validas las hipótesis usadas. Pero podríamos hacer un paso más y calcular un valor de 'τ' promedio en el ancho, asumiendo así una distribución uniforme y simplificando la integral. Llegamos entonces a:

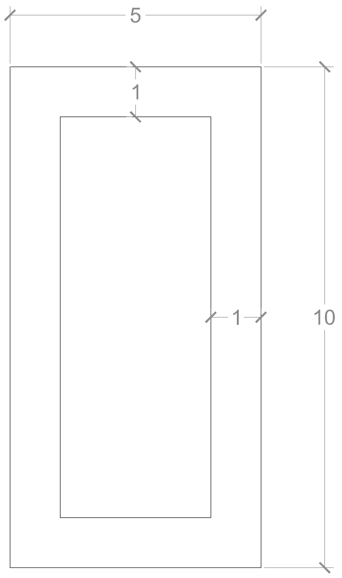
$$\tau = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b}$$

No debemos olvidarnos que lo calculado es un promedio, tanto en modulo como sentido, de las tensiones 'τ'. Por lo tanto es útil cuando la distribución de 'τ' es más bien uniforme, como por ejemplo cuando el ancho es muy pequeño. Esto no quiere decir que si el ancho es grande no se pueda usar, sino que el promedio probablemente no represente bien la distribución real.

Por último recordamos que por Cauchy al tensión 'τ' en la cara inferior deberá ser igual a las 'τ' en la cara magenta. El signo de todas estas dependerá del signo de las 'dσ', pues se calcularon por equilibrio de estas tensiones.

Ejercicio 1:

Calcular las tensiones tangenciales en el punto de mayor solicitación, para una viga simplemente apoyada con carga 'q' y longitud 'L'.



Datos: $q := 10 \cdot \frac{kN}{m}$ $L := 10m$

Dimensiones: $h_p := 10 \cdot cm$

$b_p := 5 \cdot cm$

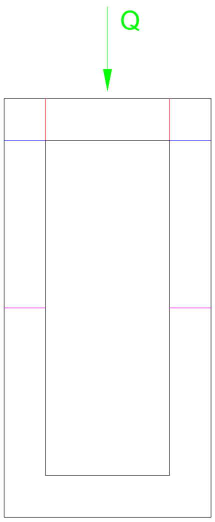
$e_p := 1 \cdot cm$

Resolución:

Propiedades de la sección: $I := \frac{b_p \cdot (h_p)^3}{12} - \frac{(b_p - e_p) \cdot (h_p - e_p)^3}{12} = 173.667 \cdot cm^4$

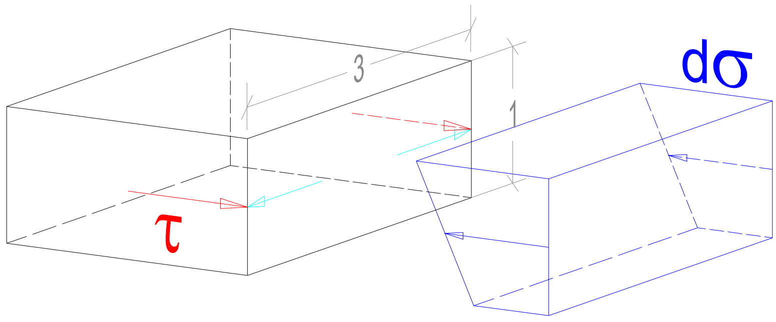
Solicitaciones máximas: Momento en el centro de la viga: $M_{max} := \frac{q \cdot L^2}{8} = 125\,kN \cdot m$

Corte en el apoyo: $Q_{max} := \frac{q \cdot L}{2} = 50\,kN$



Para determinar la distribución de las τ calcularemos estas en los tres puntos más importantes. Es decir en las líneas rojas, en las azules, y en las magenta.
Como podemos ver las líneas están hechas de forma simétrica (tenemos una línea roja de cada lado). Esto se debe a que como la sección es simétrica, respecto a la línea de fuerza del corte, y también lo son las cargas entonces la distribución del flujo de tensiones debe ser necesariamente simétrico.
Aprovechando esto que conocemos, que en ambas líneas rojas la tensión tangencial es la misma, haremos los cortes de forma simétrica por estas líneas. Deberemos recordar entonces que estamos cortando con un ancho de 2t, ya que cortamos dos espesores.

Calculamos primero las tensiones tangenciales en las líneas rojas:



Recordemos que la deducción de la teoría de Jourawsky se basa en calcular las tensiones tangenciales dibujadas en rojo a partir del equilibrio con las tensiones dσ causadas por el dM. Luego se calculan las tensiones dibujadas en cyan, que por la teoría de Cauchy son iguales en módulo a las rojas. Por lo tanto la manera que se deduce el sentido de las tensiones sale del equilibrio esquematizado en la figura de arriba.

Calculemos entonces las tensiones: $\tau = \dfrac{Q_{max} \cdot S}{I \cdot b}$

Donde: $Q_{max} = 50\,kN$ Es el corte que tiene la sección en cuestión.

$I = 173.67\,cm^4$ Es el momento inercia de toda la sección.

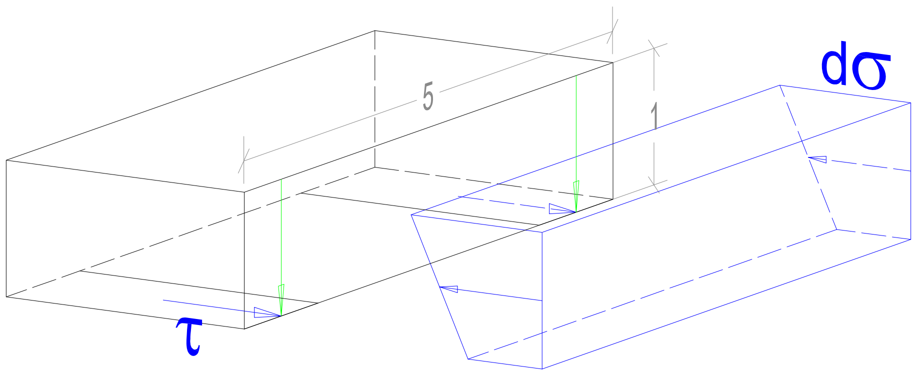
$b := 2 \cdot e_p$ Es el espesor que cortamos. En este caso cortamos dos espesores.

Finalmente 'S' es el momento estático de la sección que resbala, es decir la sección se separaría del resto de la sección. En este caso es la misma sección que dibujamos arriba en esta hoja.

$$S_{rojo} := \left(b_p - 2 \cdot e_p\right) \cdot e_p \cdot \left(\frac{h_p - e_p}{2}\right) = 13.5\,cm^3$$

Finalmente: $\tau_{rojo} := \dfrac{Q_{max} \cdot S_{rojo}}{I \cdot b} = 19.43\,MPa$

Pasamos a calcular la tensión en la línea azul. En este caso



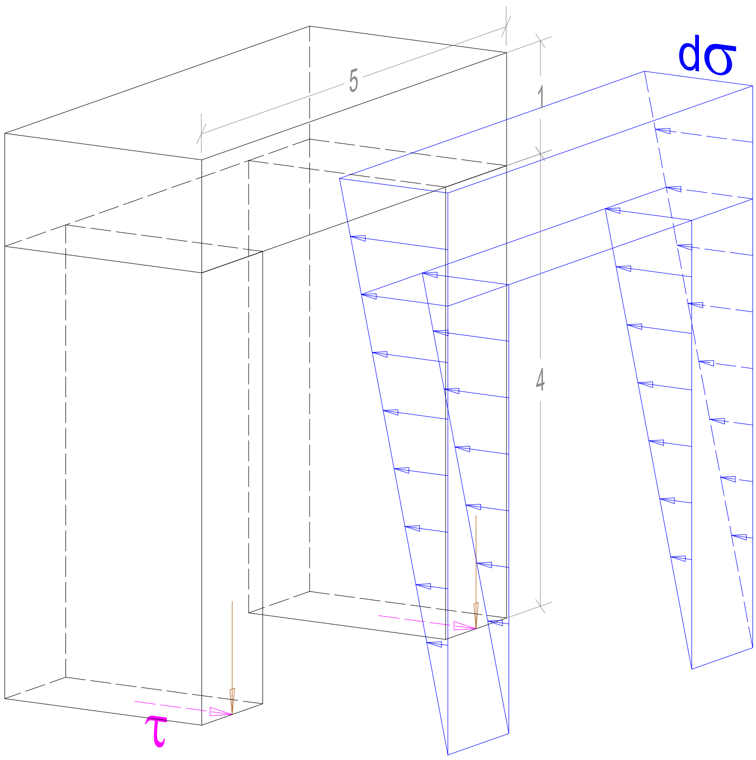
Nuevamente: $\tau = \dfrac{Q_{max} \cdot S}{I \cdot b}$

Donde el único valor que cambia respecto al valor anterior (el rojo) es el momento estático.

Ahora: $S_{azul} := b_p \cdot e_p \cdot \left(\dfrac{h_p - e_p}{2} \right) = 22.5\,cm^3$

Finalmente: $\tau_{azul} := \dfrac{Q_{max} \cdot S_{azul}}{I \cdot b} = 32.39\,MPa$

Por último calculamos las tensiones en las líneas magenta:



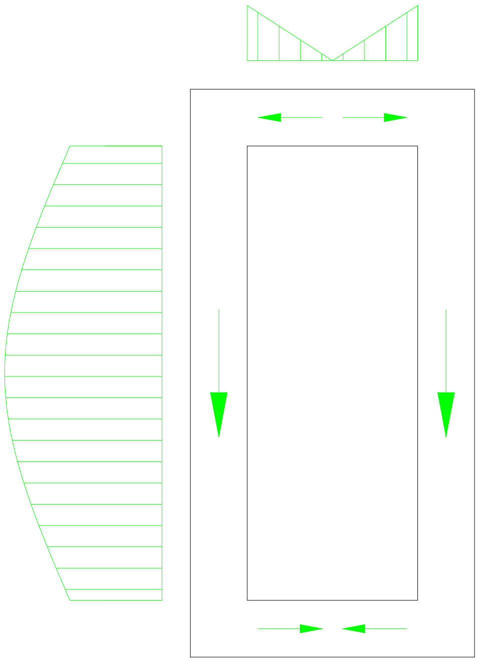
Nuevamente: $\tau = \dfrac{Q_{max} \cdot S}{I \cdot b}$

Donde el único valor que cambia respecto al valor anterior (el azul) es el momento estático.

Ahora: $S_{magenta} := S_{azul} + 2 \cdot \left(\dfrac{h_p}{2} - e_p \right) \cdot e_p \cdot \dfrac{\left(\dfrac{h_p}{2} - e_p \right)}{2} = 38.5\,cm^3$

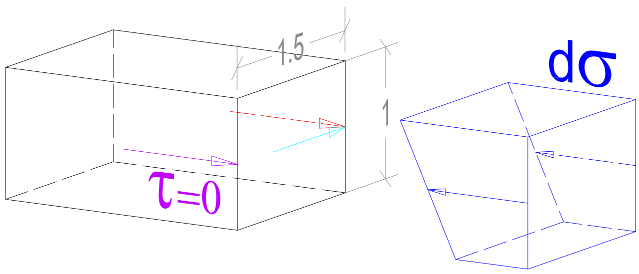
Finalmente: $\tau_{azul} := \dfrac{Q_{max} \cdot S_{magenta}}{I \cdot b} = 55.42\,MPa$

El diagrama de tensiones tangenciales final quedaría entonces:



Como podemos ver el flujo resulta simétrico, y las tensiones resultan simétricas en módulo. Sin embargo si analizamos el signo de las tensiones tangenciales en realidad estas quedan antisimétricas. Esto es una característica de las tensiones tangenciales que se puede demostrar. Si la estructura y carga son simétricas las tensiones tangenciales en si resultan antisimétricas. Esto nos permite deducir que, entonces, la tensión tangencial en en la línea de fuerzas del corte debe ser necesariamente igual a 0, como nos dio. Esto mismo se puede deducir en este caso haciendo cortes, similares al primero que hicimos, pero cada vez más cortos. Cuando el largo tiende a 0 el momento estático tiende a 0, y por lo tanto la tensión tangencial tiende a 0.

Conociendo que la tensión en el centro es igual a cero podríamos hacer planteado todo el ejercicio de una forma diferente. En vez de hacer cortes simétricos, cortamos por el medio (donde el ancho no tiene tensiones) y por otro lugar donde nosotros queramos cortar nuestro perfil. Por ejemplo para el caso de las tensiones rojas:



Donde: $Q_{max} = 50\,\mathrm{kN}$ Es el mismo que antes.

$I = 173.67\,\mathrm{cm}^4$ Es el mismo de antes.

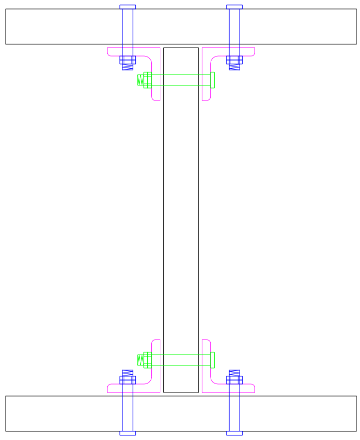
$b := e_p$ En este caso cuenta solo 1 espesor, porque el del centro no tiene tensión.

$$S_{rojo2} := \left(\frac{b_p - 2 \cdot e_p}{2}\right) \cdot e_p \cdot \left(\frac{h_p - e_p}{2}\right) = 6.75\,\mathrm{cm}^3$$ Es la mitad que antes.

Finalmente: $$\tau_{rojo} := \frac{Q_{max} \cdot S_{rojo2}}{I \cdot b} = 19.43\,\mathrm{MPa}$$ Que obviamente se llega al mismo valor.

Ejercicio 2:

Calcular el diámetro y separación de los bulones en el punto de mayor solicitación, para una viga simplemente apoyada con carga 'q' y longitud 'L'.



Datos: $q := 20 \cdot \frac{kN}{m}$ $L := 20m$

Tensión admisible de los bulones: $\tau_b := 25 \frac{kN}{cm^2}$

Chapa de ala y alma: $e := 4 \cdot cm$

$b := 40 \cdot cm$

Ángulos L 2 1/2 x 3/8: $A_a := 11.34cm^2$

$I_x := 41.14 \cdot cm^4$

$e_x := 1.92 \cdot cm$

Resolución:

Propiedades de la sección:

$$I_t := \frac{e \cdot b^3}{12} + \left[\frac{b \cdot e^3}{12} + b \cdot e \cdot \left(\frac{b+e}{2}\right)^2\right] \cdot 2 + \left[I_x + A_a \cdot \left(\frac{b}{2} - e_x\right)^2\right] \cdot 4 = 1.92 \times 10^5 \cdot cm^4$$

Solicitaciones máximas: Momento en el centro de la viga: $M_{max} := \frac{q \cdot L^2}{8} = 1 \times 10^3 \, kN \cdot m$

Corte en el apoyo: $Q_{max} := \frac{q \cdot L}{2} = 200 \, kN$

Cálculo de los bulones:

La función de los bulones es trasmitir las tensiones que están en las alas y el alma. En este caso se hace en dos etapas; primero los bulones azules transmiten los esfuerzos de las alas a los ángulos, luego los bulones verdes transmiten de los ángulos al alma. El esfuerzo total será algo mayor en el segundo caso, pues no tiene que transmitir solo la parte correspondiente a las alas sino también lo de los ángulos.

Debemos calcular estos esfuerzos y dimensionar los bulones para que su resistencia sea mayor.

La resistencia de los bulones es: $R_b = n \cdot A_b \cdot \tau_b = n \cdot \left(\frac{\pi \cdot d_b^2}{4}\right) \cdot \tau_b$

Donde: n Es la cantidad de planos de corte que transmiten el esfuerzo.

d_b Es el diámetro del bulón

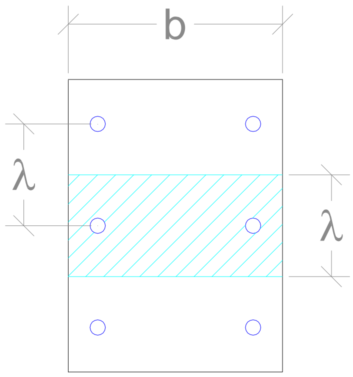
Para calcular el esfuerzo a trasmitir existe más de una forma de pensarlo. Muchas veces lo que se hace es calcular una tensión 'τ' e integrarla en el área para calcular el esfuerzo total. Veamos primero esta opción:

Sabemos por Jourawsky que: $\tau = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b}$

Una pregunta recurrente en esta instancia es, ¿Que valor tomamos para el ancho 'b' ? Opciones posible para el caso de los bulones azules serían; el ancho de los ángulos, este ancho más el alma, o el largo total del ala. Vamos a dejar la respuesta de esta pregunta para después y por ahora tomar como ancho 'b' el de las alas más alma.

Recordemos también que el momento estático es de la parte que resbala. Una manera simple de ver cual es el área de la cual tenemos que calcular el momento estático es pensar que parte se separa del resto cuando hacemos nuestro corte. Por ejemplo si no tuviéramos los dos bulones azules superiores lo que se separaría es el ala superior de todo el resto, por lo tanto el 'S' a calcular es el del ala superior ó de todo el resto (obviamente ambos casos dan el mismo valor).

En este caso entonces tendremos que integrar las 'τ' en el área que le corresponde a los bulones. Para el caso de los bulones azules este área es la siguiente:



Es decir que la fuerza que toman ambos bulones es: $\tau \cdot \lambda \cdot b = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b} \cdot \lambda \cdot b = \frac{Q \cdot S}{I} \cdot \lambda$

Como podemos ver el ancho 'b' se termina cancelando. Esto sucede en todos los casos que se calculan clavos o bulones. Es decir que en realidad la pregunta que nos hacíamos antes, de que ancho tomamos, no afecta el resultado final. Si lo pensamos con mayor detenimiento esto tiene realmente mucho sentido, pues en realidad este valor de 'τ' calculado es ficticio. No existe un ancho donde tengamos esa tensión, ya que por la línea en donde tenemos los bulones las chapas o perfiles no están unidos, la fuerza se transmite por aplastamiento del perfil ángulo ó chapa al bulón. En definitiva el bulón lo que tiene que tomar es una fuerza que es el **flujo cortante** multiplicado por la separación entre bulones 'λ'. Es decir:

$$\int \tau \, db \cdot \lambda = \frac{Q \cdot S}{I} \cdot \lambda$$

Planteamos finalmente que la resistencia de los bulones sea mayor o igual a esta fuerza, es decir:

$$n \cdot \left(\frac{\pi \cdot {d_b}^2}{4} \right) \cdot \tau_b \geq \frac{Q \cdot S}{I} \cdot \lambda$$

Esta fórmula se puede aplicar a todos los casos de cálculo de bulones, y lo usaremos para calcular tanto los bulones azules como los verdes.

Calculemos entonces los bulones azules:

$$n \cdot \left(\frac{\pi \cdot d_b^{\ 2}}{4} \right) \cdot \tau_b \geq \frac{Q \cdot S}{I} \cdot \lambda$$

Tenemos dos bulones que cada uno actúa con un plano de corte, entonces: $n := 2$

El corte máximo ya fue calculado previamente y era: $Q_{max} = 200\,kN$

El momento de inercia corresponde al de toda la sección, y era: $I_t = 1.92 \times 10^5 \cdot cm^4$

El momento estático es el momento estático del ala, entonces: $S_1 := e \cdot b \cdot \left(\frac{b + e}{2} \right) = 3.52 \times 10^3 \cdot cm^3$

Las únicas incógnitas que nos quedan son el diámetro del bulón 'd_b' y la separación entre bulones 'λ'. Por cuestiones practicas buscaremos una separación que sea aproximadamente $15d_b$, valor que adoptaremos para llegar a un diámetro y después adoptaremos un valor de diámetro comercial, y separaciones redondeadas a los 5cm. Planteamos entonces:

$$n \cdot \left(\frac{\pi \cdot d_b^{\ 2}}{4} \right) \cdot \tau_b \geq \frac{Q_{max} \cdot S_1}{I_t} \cdot 15 \cdot d_b$$

$$n \cdot \left(\frac{\pi \cdot d_b}{4} \right) \geq \frac{Q_{max} \cdot S_1}{I_t \cdot \tau_b} \cdot 15$$

$$d_b \geq \frac{4}{n \cdot \pi} \cdot \frac{Q_{max} \cdot S_1}{I_t \cdot \tau_b} \cdot 15$$

$$d_{b.min} := \frac{4}{n \cdot \pi} \cdot \frac{Q_{max} \cdot S_1}{I_t \cdot \tau_b} \cdot 15 = 14.03 \cdot mm$$

Adoptado diámetros comerciales, adoptamos: $d_b := \frac{5}{8} \cdot in = 15.88 \cdot mm$

La separación que daría tomando $15d_b$ es: $15 \cdot d_b = 23.81 \cdot cm$ Adoptamos: $\lambda := 25 \cdot cm$

Verificamos que lo adoptado verifica: $\text{Resistencia} := n \cdot \left(\frac{\pi \cdot d_b^{\ 2}}{4} \right) \cdot \tau_b = 98.97\,kN$

$$\text{Demanda} := \frac{Q_{max} \cdot S_1}{I_t} \cdot \lambda = 91.84\,kN$$

Como $\text{Resistencia} \geq \text{Demanda}$ el diseño verifica.

Calculemos ahora los bulones verdes:

En este caso tenemos un solo bulón que une el alma con el ala más ángulos, pero este actúa en dos planos de corte. Esto lo podemos entender viendo que el bulón trabaja tanto a la izquierda como a derecha del alma, es decir que tenemos dos secciones del bulón que transmite esfuerzos. Entonces nuevamente $n := 2$

El corte máximo es nuevamente: $Q_{max} = 200\,kN$

El momento de inercia es nuevamente: $I_t = 1.92 \times 10^5 \cdot cm^4$

El momento estático es el momento estático anterior más el de los perfiles ángulo. Entonces:

$$S_2 := e \cdot b \cdot \left(\frac{b + e}{2}\right) + A_a \cdot \left(\frac{b}{2} - e_x\right) \cdot 2 = 3.93 \times 10^3 \cdot cm^3$$

Haciendo el mismo calculo que de la hoja anterior:

$$d_{b.min} := \frac{4}{n \cdot \pi} \cdot \frac{Q_{max} \cdot S_2}{I_t \cdot \tau_b} \cdot 15 = 15.67 \cdot mm$$

Adoptado diámetros comerciales, adoptamos: $d_b := \frac{5}{8} \cdot in = 15.88 \cdot mm$

La separación que daría tomando 15d_b es: $15 \cdot d_b = 23.81 \cdot cm$ Adoptamos: $\lambda := 20 \cdot cm$

Verificamos que lo adoptado verifica: $Resistencia := n \cdot \left(\frac{\pi \cdot d_b^2}{4}\right) \cdot \tau_b = 98.97\,kN$

$$Demanda := \frac{Q_{max} \cdot S_2}{I_t} \cdot \lambda = 82.03\,kN$$

Como $Resistencia \geq Demanda$ el diseño verifica.

Como acotación final podemos ver que para tanto para los bulones azules como verdes adoptamos el mismo diámetro de bulón, lo cual es razonable ya que se intenta tener la menor cantidad de diámetros de bulones posibles por razones constructivas. La separación en cambio no fue la misma, y aunque esto es mas eficiente en cuanto a material, pues minimizamos la cantidad de bulones, no es para nada eficiente constructivamente. Es mejor adoptar para ambos casos la misma separación aunque esto signifique un poco más de bulones pues mejora el trabajo de taller.