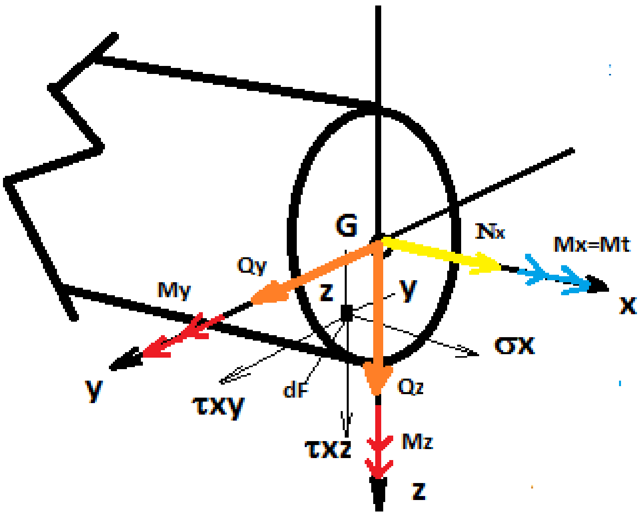
Autor: Ing. Eduardo Rofrano

Centro de Corte o Centro de Torsión (CC) :

Vamos a estudiar el problema a partir de una caso particular, para luego generalizarlo.

Planteamos las ecuaciones de equivalencia estudiadas en el análisis de las **solicitaciones presentes** en una sección transversal de una barra cualquiera, **asociadas a las tensiones generadas por estas.**



$$Nx = \int \sigma x \, dF$$

$$Qz = \int \tau xz \, dF$$

$$Qy = \int \tau xy \, dF$$

$$My = \int \sigma x \cdot z \, dF$$

$$Mz = -\int \sigma x \cdot y \, dF$$

$$Mx = Mt = \int (\tau xz \cdot y - \tau xy \cdot z) \, dF$$

Si aplicamos estas ecuaciones a algunas secciones particulares,como ser las de perfiles de sección abierta de paredes delgadas, cuyos ejes principales de inercia (ejes que tomamos siempre de referencia en el estudio de las solicitaciones simples) no sean ejes de simetría o solo uno lo sea, (por ejemplo la sección U) observamos que aplicando las ecuaciones de equivalencia a esta sección en U, suponiendo nulos los esfuerzos normales y tomando como centro de reducción O al centro de gravedad G como es habitual, tendremos que **la última ecuación de equivalencia no se cumple ya que no existiría momento torsor externo:**

Ver la figura 1 donde tenemos que **la resultante de los esfuerzos de corte verticales Qz, en la sección transversal, pasan por el centro de gravedad G.** Esta resultante genera los esfuerzos presentes en las alas y alma que corresponden a la integración de las tensiones tangenciales debidas al corte presente Qz. Pero como veremos, no son las únicas tensiones presentes.
En este caso se cumple que la componente horizontal del esfuerzo de corte es Qy=0 (ver ecuaciones).
Los valoresv de H,C,tf y tw son obtenibles de tablas.

ECUACIONES DE EQUIVALENVCIA:

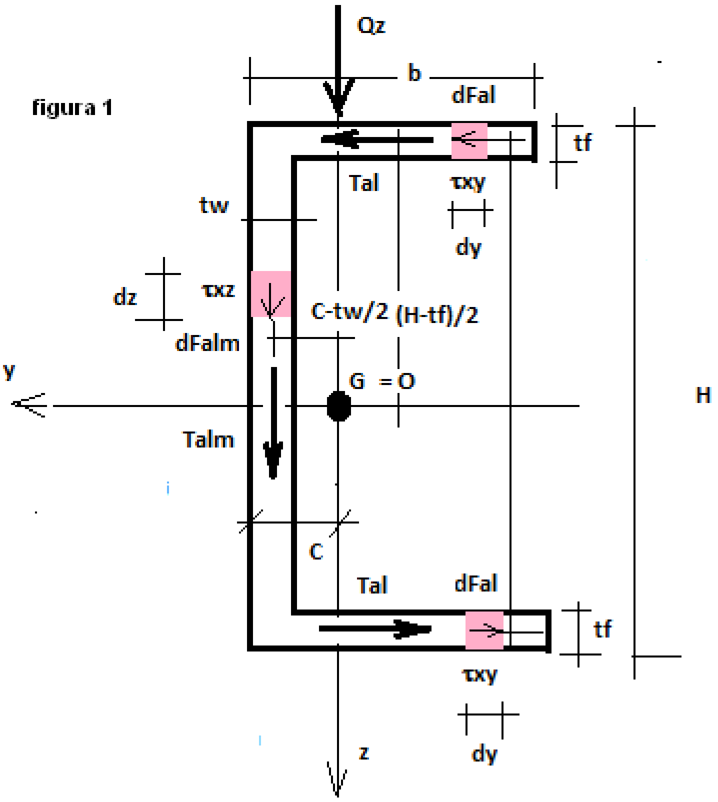
$$Nx = \int \sigma x \, dF = 0 \qquad Qz = \int \tau xz \, dF \neq 0 = Talm \qquad Qy = \int \tau xy \, dF = 0 = Tal - Tal$$

$$My = \int \sigma x \cdot z \, dF \neq 0 \qquad Mz = -\int \sigma x \cdot y \, dF = 0$$

$$Mx = Mt = \int (\tau xz \cdot y - \tau xy \cdot z)\, dF = 2 \cdot Tal \cdot \frac{(H - tf)}{2} + Talm \cdot \left(C - \frac{tw}{2}\right) \neq 0$$

Observamos que no se cumple la última ecuación de equivalencia de los momentos torsores, no teniendo momento torsor externo.

$$Tal = \int \tau xy\, dFal \qquad Talm = \int \tau xz\, dFalm \qquad dFalm = tw \cdot dz \qquad dFal = tf \cdot dy$$



Sabemos que por Jourasvki las tensiones tangenciales son:

$$\tau xy = \frac{(Qz \cdot Sy(y))}{Jy \cdot tf} \qquad \tau xz = \frac{(Qz \cdot Sy(z))}{Jy \cdot tw}$$

Sabemos que:
τxy=f(y) y τxz=f(z2)

Si reemplazamos en la última ecuación de equivalencia obtenemos la expresión del momento torsor generado.

$$Mt = Mx = 2 \cdot \left(\int \tau xy\, dFal\right) \cdot \frac{(H - tf)}{2} + \left(\int \tau xz\, dFalm\right) \cdot \left(C - \frac{tw}{2}\right)$$

Introduciendo los brazos de palanca de los esfuerzos de corte de las alas y alma en las integrales, obtendremos:

$$Mt = Mx = 2 \cdot \left[\int \tau xy \cdot \frac{(H - tf)}{2}\, dFal\right] + \left[\int \tau xz \cdot \left(C - \frac{tw}{2}\right) dFalm\right]$$

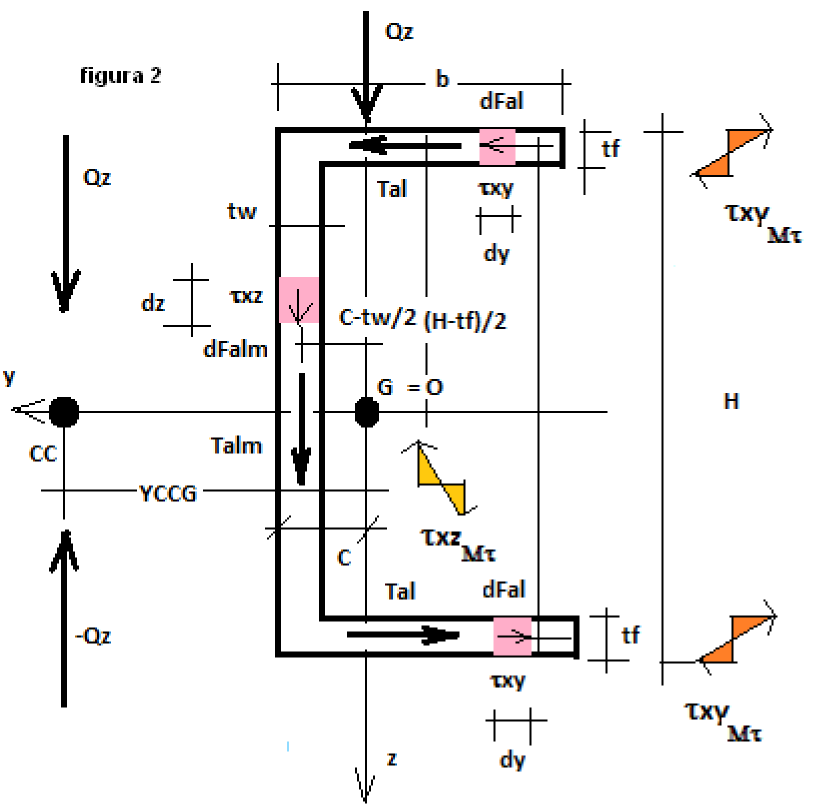
Reemplazando las expresiones de Jourasvki y **transformando las integrales de superficie en integrales curvilíneas tendremos:**

$$Mt = Mx = 2\cdot\int \frac{(Qz\cdot Sy(y))}{Jy\cdot tf}\cdot tf\cdot\frac{(H-tf)}{2}\,dy + \int \frac{(Qz\cdot Sy(z))}{Jy\cdot tw}\cdot tw\cdot\left(C-\frac{tw}{2}\right)dz$$

Consecuentemente surge el efecto de torsión debido al momento torsor encontrado

<u>El objetivo de este análisis es</u> determinar el punto o centro de reducción por donde debería pasar la resultante de los esfuerzos de corte para <u>que</u> no exista este efecto de torsión, y <u>se cumpla la ecuación de equivalencia, cuando no tenemos momento torsor externo.</u>

<u>Ver figura 2</u> siguiente. En esta **planteamos un sistema de fuerzas internas equivalente al dado para que el efecto sobre la sección transversal sea el mismo que el de Qz en el baricentro G . A tal fin aplicamos un sistema de fuerzas iguales y opuestas en un punto desconocido supuesto,** que ubicamos en coordenada positiva hacia la izquierda. En este caso particular por existir un eje de simetria el punto en cuestión debera estar ubicado sobre el mismo aún en el caso de que Qy sea distinto de cero ya que la resultante de los esfuerzos de corte en las alas pasará por el baricentro. Por lo tanto tenemos que determinar la única coordenada posible que llamamos YCCG. Se genera un sistema formado por Qz aplicado en el CC y una cupla torsora. **La ecuación de equivalencia de momentos referida al centro O coincidente con el G será:**



$$Qz \cdot YCCG = Mt = 2 \cdot \int \frac{(Qz \cdot Sy(y))}{Jy \cdot tf} \cdot tf \cdot \frac{(H - tf)}{2}\, dy + \int \frac{(Qz \cdot Sy(z))}{Jy \cdot tw} \cdot tw \cdot \left(C - \frac{tw}{2}\right) dz$$

$$Qz \cdot YCCG = 2 \cdot \int \frac{(Qz \cdot Sy(y))}{Jy \cdot tf} \cdot tf \cdot \frac{(H - tf)}{2}\, dy + \int \frac{(Qz \cdot Sy(z))}{Jy \cdot tw} \cdot tw \cdot \left(C - \frac{tw}{2}\right) dz$$

Simplificando y sacando la constante Jy fuera de la integral, resulta:

$$\boxed{YCCG = \frac{2}{Jy} \cdot \int \frac{Sy(y)}{Jy} \cdot \frac{(H - tf)}{2}\, dy + \int \frac{Sy(z)}{Jy} \cdot \left(C - \frac{tw}{2}\right) dz}$$

Esta expresión nos permite obtener la ubicación del llamado **Centro de corte o Centro de Torsión, y que <u>podemos definir como el punto por donde debe pasar la resultante de los esfuerzos de corte para que no exista efecto de torsión ,Mt, en la sección transversal. Es decisr que solo surgan tensiones tangenciales de corte. Si no se cumple esta condición se genera una torsión de momento Mt que origina tensiones tangenciales debidas a este momento torsor que es Mt=Qz.YCCG. Ver figura 2.</u>**
Estas deben ser calculadas con la teoria de perfiles abierto de paredes delgadas y superpuestas a las tensiones de corte presentes.
Esta definición tiene que ver con la denominación de centro de torsión, por que CC es el centro de reducción y rotación de la sección transversal al trasladar Qz actuante en G, que produce un momento de traslación Mt=Qz.YCCG. Si tuviéramos también un momento Mx debido a las cargas exteriores al tomar como centro de reducción el G debera ser adicionado como corresponda al momento generado por el esfuerzo de corte no pasante por el CC. El momento total real presente será el que surge de la reducción del sistema al CC.
Por otro lado <u>también podemos definir al CC como el punto cuya posición es tal que un esfuerzo cortante de dirección cualquiera supuesto aplicado en CC es estáticamente equivalente al sistema de fuerzas resultante de las tensiones tangenciales debidas a dicho esfuerzo cortante. Esta definición esta de acuerdo con el planteao de la ecuación de equivalencia que nos permitio calcular YCCG.</u>

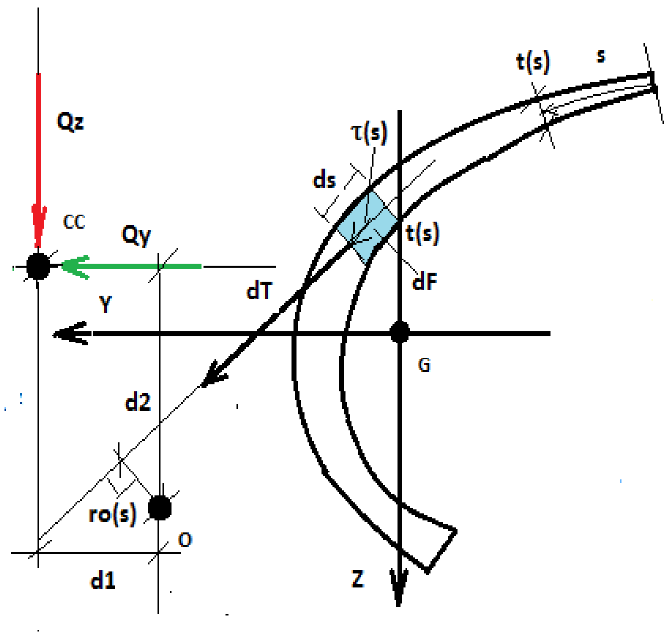
Como una conclusión importante podemos decir que **la solicitación de la sección transversal** donde **la resultante de corte no pase por el CC estará sometida a <u>flexotrorsión .</u>** Si esta fuerza transversal pasa por CC la solicitación será **<u>flexión transversal</u>** o sea flexión y corte solamente, por lo tanto la sección se deformara por flexión produciéndose corrimientos verticales en el plano de carga si la flexión es normal, sin rotación alrededor del CC. Esto último justifica que al CC se lo denomine también Centro de Flexión, por ser esta la solicitación presente y sin torsión.

Analisis del caso mas general en forma teórica, donde existen ambas componentes de corte y el CC tiene dos coordenadas:

Partimos de una sección genérica de espesor delgado variable y corte en ambas direcciones correspondientes a los ejes principales de inercia de la sección.

Cálculamos la coordenada del CC referida a un centro de torsión cualquira genérco O para la dirección Qz siendo totalmnte análoga la expresión de la coordenada del CC para la otra dirección Qy. Partimos de que el corte Qz pasa por el CC desconocido.

Planteamos la ecuación de equivalencia de momentos torsores del sistema respecto del centro de torsión O general, es decir obtenemos a partir de las tensiones de Juravski debidas al corte Qz el momento de estas respecto a O. Este momento debe ser equivalente al momenro de Qz para que no se produzca momento torsor y en consecuencia tensiones tangenciales de torsión ya que el corte es pasante por CC que por definición es el punto que corresponde a momento torsor nulo, y al tomar momentos respecto de cualquier punto del plano esta equivalencia se cumple siempre.



$dF = t(s) \cdot ds$ $\qquad\qquad$ $dT = \tau(s) \cdot dF = \tau(s) \cdot t(s) \cdot ds$

$$Mto = \int dT \cdot ro(s)\ dF = Qz \cdot d1$$

$$Qz \cdot d1 = \int \tau(s) \cdot t(s) \cdot ro(s)\, ds$$

(la variable **s** corresponde a la coordenada curvilinea de la línea media del espesor variablea)

Teniendo en cuenta las tensiones tangenciales debidas al corte por Jurasvki:

$$\tau(s) = \frac{(Qz \cdot Sy(s))}{Jy \cdot t(s)}$$

$$Qz \cdot d1 = \int \frac{(Qz \cdot Sy(s))}{Jy \cdot t(s)} \cdot t(s) \cdot ro(s)\, ds$$

Simplificando resulta:

$$\boxed{d1 = \frac{1}{Jy} \cdot \int Sy(s) \cdot ro(s)\, ds}$$

$Sy(s)$ (Corresponde al momento estático de la porción de sección transversal respecto al eje neutro Y que resulta del corte longitudinal donde surgen los esfuerzos de resbalamiento que generan las tensiones de corte en la sección transversal por couchy, funciones de la coordenada curvilínea.)

$ro(s)$ (correspondede a la distancia entre la recta de acción del esfuerzo dT y el centro de torsión O función de la coordenada curvilinea).

Revisando el caso particular resuelto del perfil U vemos que en este caso los ro(s) se corresponden con las distancias $\frac{(H - tf)}{2}$ y $\left(C - \frac{tw}{2}\right)$ constantes entre el centro de momentos O coincidente con G de las alas y el alma, respectivamente.

d1 (Correspone a la coordenada en dirrección Y del CC respcto del O)

Análogamente podemos deducir la coordednada d2 en dirección z del CC respecto a O debida al esfuerzo de corte Qy.:

$$\boxed{d2 = \frac{1}{Jz} \cdot \int Sz(s) \cdot ro(s)\, ds}$$

CONCLUSION:

El CC se encuentra en la intersección de las rectas paralelas a los ejes principales z e y trazadas a las distancias d1 y d2 del centro O respectivamente.