

CAPÍTULO 1

ESTADO DE TENSIÓN

1.1 Tensor de Tensiones

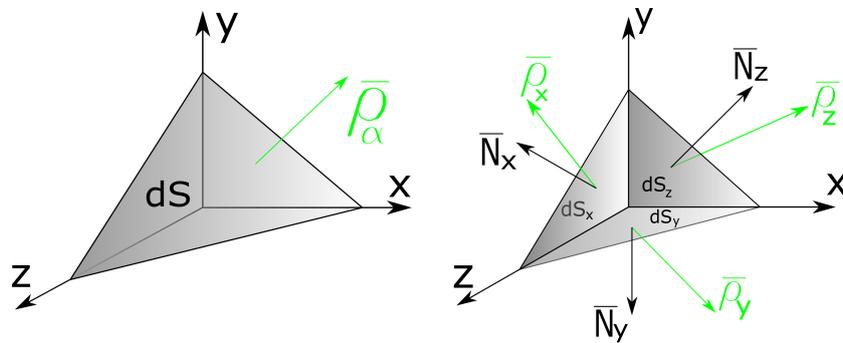


Fig. 1.1: Vector tensión ρ correspondiente a un plano π

La tensión ρ_α actúa sobre la cara inclinada, que tiene una superficie igual a dS . De la misma forma ρ_x, ρ_y, ρ_z actúan sobre los planos X, Y, Z, que tienen asociados a las superficies dS_x, dS_y, dS_z .

Los diferenciales de superficie ($dS_x; dS_y; dS_z$) resultan ser la proyección de dS sobre cada plano (plano x, plano y y plano z).

$$Proy_X(\overline{dS}) = dS \cdot \cos \alpha_1 \cdot I \longrightarrow dS_X = dS \cdot \cos \alpha_1 \longrightarrow dS_X = dS \cdot l$$

$$Proy_Y(\overline{dS}) = dS \cdot \cos \alpha_2 \cdot J \longrightarrow dS_Y = dS \cdot \cos \alpha_2 \longrightarrow dS_Y = dS \cdot m$$

$$Proy_Z(\overline{dS}) = dS \cdot \cos \alpha_3 \cdot K \longrightarrow dS_Z = dS \cdot \cos \alpha_3 \longrightarrow dS_Z = dS \cdot n$$

Notamos con las expresiones anteriores, que justamente (l, m, n) resulta el vector normal a la superficie.

Si descomponemos el vector tensión ρ_α en las direcciones X; Y; Z obtenemos ρ_x, ρ_y, ρ_z . Luego al multiplicar por el diferencial de área, obtenemos la fuerza en cada dirección. Si hacemos sumatoria de fuerzas en cada dirección:

$$\overline{\rho_\alpha} dS = \overline{\rho_x} dS_X + \overline{\rho_y} dS_Y + \overline{\rho_z} dS_Z$$

Reemplazando cada diferencial de área por lo previamente obtenido:

$$\begin{aligned} \overline{\rho_\alpha} dS &= \overline{\rho_x} \cdot l dS + \overline{\rho_y} \cdot m dS + \overline{\rho_z} \cdot n dS \longrightarrow \overline{\rho_\alpha} = \overline{\rho_x} \cdot l + \overline{\rho_y} \cdot m + \overline{\rho_z} \cdot n \\ \longrightarrow \begin{bmatrix} \rho_{\alpha x} & \rho_{\alpha y} & \rho_{\alpha z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \end{bmatrix} \cdot l + \begin{bmatrix} \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \end{bmatrix} \cdot m + \begin{bmatrix} \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot n \\ \overline{\rho_\alpha} &= \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \longrightarrow \overline{\rho_\alpha} = [T_T] \cdot \hat{n} \end{aligned}$$

Llegamos a ésta expresión donde la “matriz” resulta ser las componentes en X, Y, Z del **tensor de tensiones**, que representa el estado tensional del punto. Me permite conocer el vector tensión asociado a todo plano pasante por el punto.

$$[T_T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Recordemos el concepto de estado de tensión. Es el *conjunto de las infinitas tensiones asociadas a los infinitos planos que pasan por un punto*, donde cada tensión está asociada a un determinado plano.

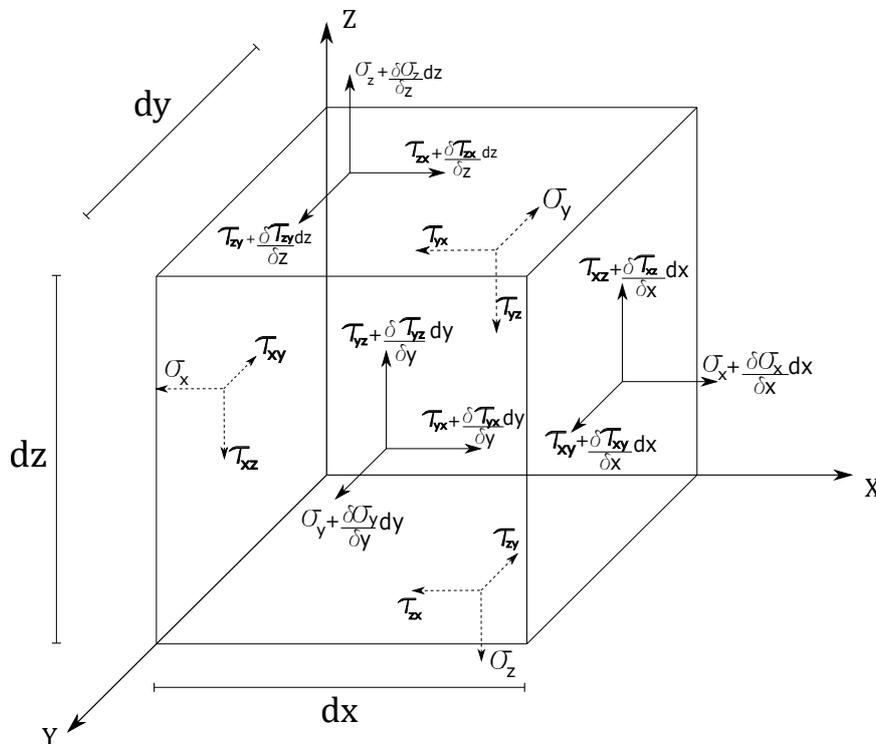


Fig. 1.2: Cubo elemental sometido a fuerzas de masa en el baricentro

1.2 Ecuaciones de equilibrio

Planteo equilibrio en el cubo elemental realizando sumatoria de fuerzas en dirección X. A cada tensión que actúa en dirección X se la multiplica por la superficie asociada, y resulta:

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \\ & \tau_{yx} dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + b_X dx dy dz = 0 \\ \rightarrow & \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz + b_X dx dy dz = 0 \\ \rightarrow & \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_X = 0 \end{aligned}$$

Análogamente para los tres ejes, resultan las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_Z &= 0 \end{aligned}$$

1.3 Teorema de Cauchy

Ahora calculamos momento respecto al baricentro del cubo elemental, respecto al eje X:

$$\begin{aligned} - \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} - \tau_{yz} dy dz \frac{dy}{2} + \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy \frac{dz}{2} + \tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} &= 0 \\ \rightarrow - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \frac{dx dy^2 dz}{2} - \frac{\tau_{yz}}{2} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \frac{dx dy dz^2}{2} + \frac{\tau_{zy}}{2} dx dy dz & \end{aligned}$$

Los términos que poseen un diferencial elevado al cuadrado son infinitésimos de orden superior, y los despreciamos.

$$\rightarrow \tau_{yz} dx dy dz + \tau_{zy} dx dy dz = (\tau_{zy} - \tau_{yz}) dx dy dz = 0$$

Lo que resulta

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

Análogamente para los tres ejes, resulta que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad ; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Expresiones que se conocen como teorema de Cauchy: Dados dos planos perpendiculares, las componentes de tensión tangencial a la arista son iguales entre sí, y concurren o se alejan de la arista. Si un plano tiene $\tau = 0$, el plano ortogonal también tendrá $\tau = 0$.

Aplicando estas igualdades definidas por Cauchy en las ecuaciones de equilibrio, resulta que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_Z &= 0 \end{aligned}$$

1.4 Tensiones Principales

Dentro de los infinitos planos que tiene cada punto del sólido, existen algunos para los cuales la componente τ es nula. Estos planos son denominados “Planos Principales”, los cuales tendrán asociadas **Tensiones Principales**.

Desarrollando la expresión dada por el tensor de tensiones:

$$[T_T] \cdot \hat{n} = \sigma_i \cdot \hat{n} \rightarrow 0 = [T_T - I \cdot \sigma_i] \cdot \hat{n}$$

Se trata de un sistema de ecuaciones homogéneas. Para que tenga valores distintos a la solución trivial ($\hat{n} = 0$) es condición necesaria y suficiente que el determinante de la matriz definida como $[T_T - I \cdot \sigma_i]$ sea nulo.

Desarrollando el determinante y agrupando términos, se llega a la siguiente expresión denominada “Ecuación de Lagrange”:

$$0 = -\sigma_i^3 + \sigma_i^2 \cdot I_1 - \sigma_i \cdot I_2 + I_3$$

Con: σ_i : Tensión principal

I_1 : Primer invariante, traza del tensor de tensiones

$$I_1 = tr [T_T] = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

I_2 : Segundo invariante: suma de los menores complementarios

$$I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_x \cdot \sigma_z + \sigma_y \cdot \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

I_3 : Tercer invariante: determinante del tensor de tensiones

$$I_3 = \det [T_T]$$

Si lo vemos del lado algebraico, lo que estamos haciendo es buscar los autovalores del tensor de tensiones, donde luego cada dirección asociada a cada tensión principal es el autovector asociado a dicho autovalor.

Al estar calculando autovalores y autovectores de una matriz simétrica, con valores reales, las tensiones principales son reales y las direcciones principales son ortogonales. A su vez, como estamos trabajando con un tensor el valor de las tensiones principales es independiente del sistema de coordenadas utilizado. Por lo tanto, I_1 , I_2 e I_3 son invariantes respecto a la terna en la que se opera.

1.5 Direcciones principales

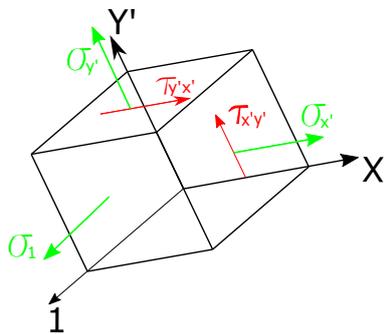


Fig. 1.3: Cubo elemental en terna $(x' ; y' ; 1)$

Sea σ_1 una tensión principal; defino una terna con este eje y dos ejes ortogonales cualesquiera.

$$[T_T]_{(x';y';1)} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & 0 \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 \end{bmatrix}$$

El tensor en esta nueva terna define al mismo estado de tensión original; hallo las otras tensiones principales. Para ello, busco que el determinante del tensor en esta terna sea nulo:

$$\det [T_T - I \cdot \sigma_i]_{(x';y';1)} = 0 = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} - \sigma_i & \tau_{x'y'} & 0 \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} - \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 - \sigma_i \end{bmatrix}$$

Desarrollando, se llega a que:

$$\sigma_{2,3} = \frac{\sigma_{x'} + \sigma_{y'}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x'} - \sigma_{y'}}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2}$$

Sean σ_2 y σ_3 , correspondientes a las direcciones \hat{n}_2 y \hat{n}_3 , dos tensiones principales.

$$[T_T - I \cdot \sigma_2] \cdot \hat{n}_2 = 0 \longrightarrow \text{Multiplico por } \hat{n}_3 \longrightarrow [T_T - I \cdot \sigma_2] \cdot \hat{n}_2 \cdot \hat{n}_3 = 0$$

$$[T_T - I \cdot \sigma_3] \cdot \hat{n}_3 = 0 \longrightarrow \text{Multiplico por } \hat{n}_2 \longrightarrow [T_T - I \cdot \sigma_3] \cdot \hat{n}_3 \cdot \hat{n}_2 = 0$$

Restando ambas identidades:

$$(\sigma_3 - \sigma_2) \hat{n}_3 \cdot \hat{n}_2 = 0$$

Si $\sigma_3 \neq \sigma_2 \longrightarrow \hat{n}_3 \cdot \hat{n}_2 = 0 \longrightarrow$ Las tensiones principales son ortogonales

Si $\sigma_3 = \sigma_2 \longrightarrow \hat{n}_3 \cdot \hat{n}_2 = K \longrightarrow$ Todas las direcciones pertenecientes al plano son principales

\therefore Si una raíz es doble o triple, su auto espacio es de dimensión 2 o 3, respectivamente.

Esto implica que para un estado de tensión cualquier existe o 3 o infinitas direcciones principales. Si los tres autovalores son distintos, existirán 3. Si dos autovalores son iguales, y el tercero distinto, entonces existirán infinitas dirección principales; el un plano y la dirección perpendicular a este. Por último, si los tres autovalores son iguales, entonces toda dirección será dirección principal. Este último caso es el estado hidrostático.

1.6 Tensor hidrostático y desviador

El tensor de tensiones puede descomponerse en un tensor esférico o hidrostático y uno desviador

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}}_{\text{tensor esférico}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix}}_{\text{tensor desviador}}$$

$$[T_T] = [T_E] + [T_D]$$

Con: $\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3}$ ($\sigma_0 > 0 \longrightarrow$ Equitracción ; $\sigma_0 < 0 \longrightarrow$ Equicompresión)

1.7 Obtención de las tensiones principales mediante el método gráfico

Partiendo de las ecuaciones previas:

$$\bar{\rho} = [T_T] \cdot \hat{n} ; \rho^2 = \sigma^2 + \tau^2$$

Mediante métodos analíticos se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 = \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 \cdot l^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \cdot (1 - l^2) ; 0 < l < 1$$

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 = \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 \cdot m^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \cdot (1 - m^2) ; 0 < m < 1$$

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 = \left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 \cdot n^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \cdot (1 - n^2) ; 0 < n < 1$$

Tienen la forma de:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \longrightarrow \text{corresponden a 3 circunferencias}$$

1^{ra} Familia de circunferencias

$$C_1 = \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}; 0\right)$$

$$l = 0 \longrightarrow \text{Radio} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} ; l = 1 \longrightarrow \text{Radio} = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$$

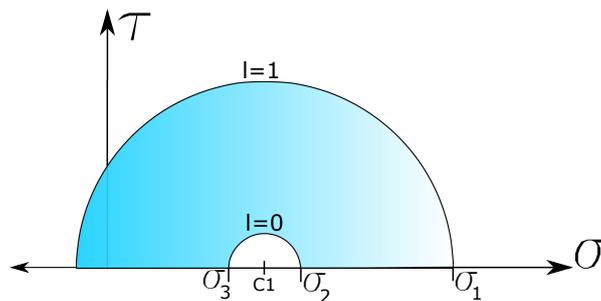


Fig. 1.4: 1^{ra} Familia de circunferencias

2^{da} Familia de circunferencias

$$C_2 = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}; 0\right)$$

$$m = 0 \longrightarrow \text{Radio} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} ; m = 1 \longrightarrow \text{Radio} = \sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

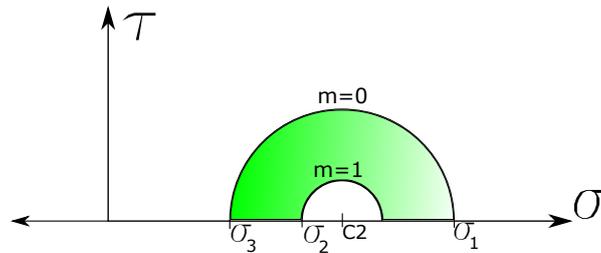


Fig. 1.5: 2^{da} Familia de circunferencias

3^{ra} Familia de circunferencias

$$C_3 = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}; 0 \right)$$

$$n = 0 \rightarrow \text{Radio} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad n = 1 \rightarrow \text{Radio} = \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

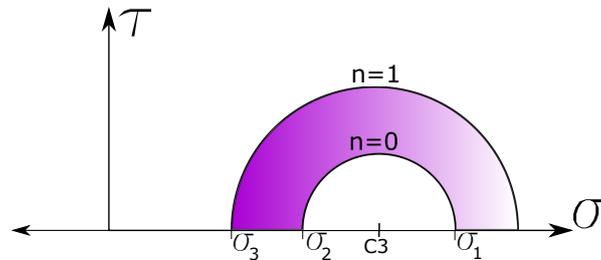


Fig. 1.6: 3^{ra} Familia de circunferencias

El conjunto de las tres familias de circunferencias

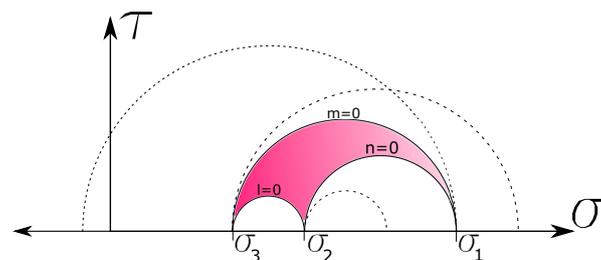


Fig. 1.7: Infinitas combinaciones posibles de σ y τ para los infinitos planos π

La intersección entre las tres familias forma la zona de planos posibles. En ese área deberán ubicarse todas las tensiones ρ correspondientes a cualquier plano π para el estado de tensión dado definido por las tensiones principales σ_1 , σ_2 y σ_3 .

El procedimiento para calcular la tensión de un plano π que forma los ángulos $(\alpha; \beta; \gamma)$ respecto a los ejes principales es (ver Fig. 1.8):

- Trazo una recta con ángulo α respecto de 1. Las mismas cortan en A y B a las circunferencias con centro en C_2 y C_3 .

- Con centro en C_1 , trazo un arco de circunferencia pasante por A y por B . Llamaremos a dicho arco a_1 .
- Trazo una recta con ángulo γ respecto a 3. La misma corta en E y F a las circunferencias con centro en C_1 y C_2 .
- Con centro en C_3 , trazo un arco de circunferencia pasante por E y por F . Llamaremos a dicho arco a_2 .
- La intersección de los arcos a_1 y a_2 es el punto correspondiente a la tensión ρ^π .

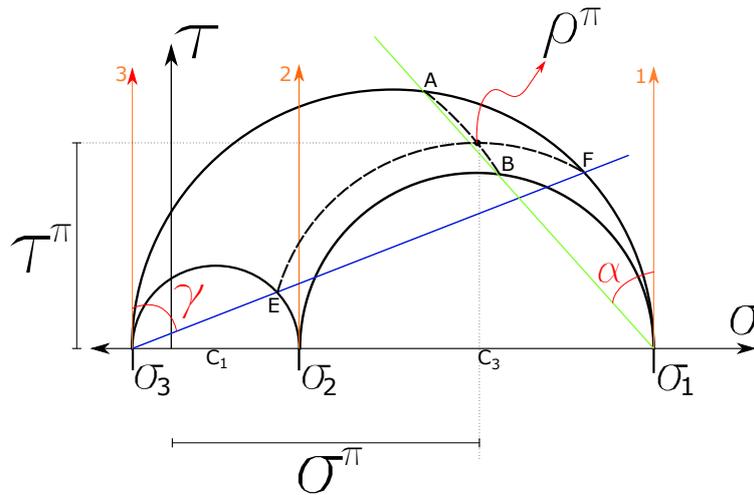


Fig. 1.8: Tensión ρ asociada al plano π

1.7.1 Estado doble o plano

Al ser un estado plano:

$$[T_T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

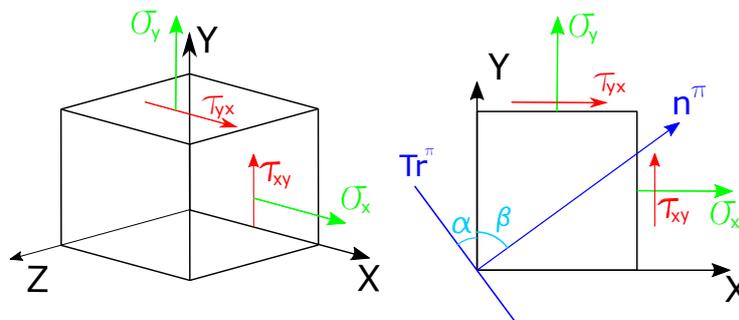


Fig. 1.9: Estado Plano- Cubo elemental

Se toma como convención:

- α : ángulo entre π y X
- β : ángulo entre π y Y
- τ positivo si genera un momento horario

Para hallar el valor de ρ^π (ver Fig. 1.10):

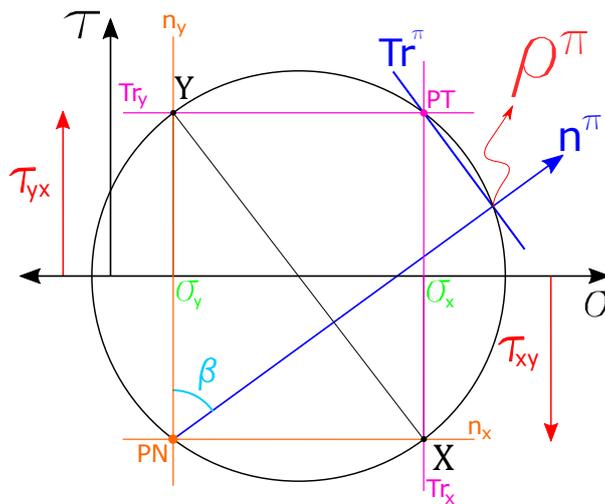


Fig. 1.10: Estado Plano- Circunferencias de Mohr

- Ubico los puntos que corresponden a la tensión de los planos X e Y ($X = (\sigma_x; \tau_{xy})$ e $Y = (\sigma_y; \tau_{yx})$)
- Uno ambos puntos, definiendo el diámetro de la circunferencia, y pivoteo respecto a su intersección con el eje horizontal, formando la circunferencia.
- Desde X trazo su traza (Tr_x) que es una recta vertical, y su normal (\hat{n}_x) que es una recta horizontal.
- Desde Y trazo su traza (Tr_y) que es una recta horizontal, y su normal (\hat{n}_y) que es una recta vertical.
- La intersección de ambas trazas definen el **Polo de trazas (PT)** y la intersección de ambas normales, el **Polo de Normales (PN)**.
- Desde los polos correspondientes trazo la normal y la traza de π con los ángulos correspondientes.
- La intersección de ambos con la circunferencia define la tensión del plano π , ρ^π .