

CIRCUNFERENCIA DE MOHR: (para el estado elástico lineal)

Las expresiones (4) y (5) relacionan a p y σ , correspondientes a un plano determinado caracterizado por su normal $\vec{e}$ y los cosenos directores que forma este vector con los ejes X, Y y Z ; con los tensores σ_{ii} y τ_{ij} componentes de los 3 ejes coordenados.

Supongamos que los 3 ejes coordenados son los 3 ejes principales 1, 2, 3. Las expresiones (4) y (5) pueden de la siguiente manera:

$$\sigma^2 + \tau^2 = p^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 \quad (72)$$

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \quad (73)$$

$$1 = l^2 + m^2 + n^2 \quad (74)$$

OBJETO DE ESTE ANÁLISIS:

- Se parte de los tensores principales. La terna es la siguiente: $(0, 1, 2, 3)$.
- Se conocen los tensores p y σ y se quiere determinar la orientación del plano al que pertenece con dichos tensores.
- En este caso las incógnitas son l^2, m^2, n^2 (o en su defecto l, m y n).

Si expresamos a (72), (73) y (74) en forma matricial, quedaremos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{[C]} \cdot \begin{pmatrix} l^2 \\ m^2 \\ n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 + \sigma^2 \\ \sigma \\ 1 \end{pmatrix} \quad (75)$$

El determinante de la matriz de los coeficientes puede:

$$\det[C] = \sigma_1^2(\sigma_2 - \sigma_3) - \sigma_2^2(\sigma_1 - \sigma_3) + \sigma_3^2(\sigma_1 - \sigma_2) = \Delta.$$

y en consecuencia:

$$l^2 = \frac{\begin{vmatrix} \sigma^2 + \sigma^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad m^2 = \frac{\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma^2 + \sigma^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1 & \sigma & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$n^2 = \frac{\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma^2 + \sigma^2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (76.b)$$

Cada incógnita es el cociente entre 2 determinantes,

Resolviendo los determinantes y simplificando se llega a:

$$L^2 = \frac{\sigma^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \quad (27.a)$$

$$m^2 = \frac{\sigma^2 + (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \quad (27.b)$$

$$n^2 = \frac{\sigma^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \quad (27.c)$$

Reescribiendo las ecuaciones:

$$\left[\begin{aligned} \sigma^2 + \sigma^2 - \sigma(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3 - L^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) &= 0 \quad (28.a) \\ \sigma^2 + \sigma^2 - \sigma(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_1\sigma_3 - m^2(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) &= 0 \quad (28.b) \\ \sigma^2 + \sigma^2 - \sigma(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2 - n^2(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) &= 0 \quad (28.c) \end{aligned} \right.$$

Reduciendo varias transformaciones:

$$\left[\begin{aligned} \sigma^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 &= \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + L^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (29.a) \\ \sigma^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 &= \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 + m^2(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) \quad (29.b) \\ \sigma^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 &= \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 + n^2(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) \quad (29.c) \end{aligned} \right.$$

Las ecuaciones (8a) se pueden expresar:

$$\sigma^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 = \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 l^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 (1 - l^2) \quad (80a)$$

$$\sigma^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 = \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 m^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 (1 - m^2) \quad (80b)$$

$$\sigma^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 = \left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 n^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 (1 - n^2) \quad (80c)$$

Por otro lado recordemos la ecuación general de una circunferencia:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

En una forma $(0, x, y)$ el centro se ubica en los coordenados:

$$\begin{cases} x_c = a \\ y_c = b \end{cases}$$

y el radio $\rightarrow R = R$

Análisis de las expresiones (80):

~~→ Representa una f.~~

→ Cada expresión representa una familia de circunferencias.

→ Todas se dibujan en el plano (σ, τ) .

→ Las variables son σ y τ : σ : eje de abscisas
 τ : " " ordenadas.

→ Cada una de las 3 familias de circunferencias depende de la suma de valores de las tensiones principales.

→ Para cada familia de circunferencias, las posiciones de los centros de las circunferencias son los siguientes:

FAMILIA Nº 1: Función del parámetro 'L':

$$\begin{cases} \sigma_c = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} & \text{centro 'C}_1\text{' } \\ \tau_c = 0 \end{cases} \quad (8.9)$$

FAMILIA Nº 2: Función del parámetro 'm':

$$\begin{cases} \sigma_c = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} & \text{centro 'C}_2\text{' } \\ \tau_c = 0 \end{cases} \quad (8.10)$$

FAMILIA Nº 3: Función del parámetro 'n':

$$\begin{cases} \sigma_c = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} & \text{centro 'C}_3\text{' } \\ \tau_c = 0 \end{cases} \quad (8.11)$$

IMP

Es decir, todas las familias de circunferencias tienen a su centro sobre el eje de abscisas.

COORDENADAS
DE LOS
CENTROS
DE LAS
FAMILIAS
DE
CIRCUNFERENCIAS

→ Por otra parte, cada familia de circunferencias depende de 1 parámetro solamente:

$$\left. \begin{array}{l} L \\ \sigma \\ \sigma' \end{array} \right\} \begin{array}{l} m \\ n \end{array}$$

Estos parámetros son los ejes directos del plano ^{perpendicular} ~~plano~~ el cual se ~~se~~ desea determinar: p, σ, σ' .

→ Cada familia de circunferencias está limitada por 2 circunferencias extremas.

Estas circunferencias extremas van depender, para cada familia, de los parámetros respectivos: L, m, n .
Pero estas son ejes directos, pero cada una se tendrá:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq L \leq 1 \\ 0 \leq m \leq 1 \\ 0 \leq n \leq 1 \end{array} \right.$$

→ las circunferencias extremas para cada familia son las siguientes:

FAMILIA N° 1: PARÁMETRO 'L'

$$\left[\begin{array}{l} L=0 \quad \sigma^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (82a) \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} L=1 \quad \sigma^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 = \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (82b) \end{array} \right.$$

FAMILIA N° 2: 'Parámetro' 'm'

$$\left[\begin{array}{ll} m = 0 & \sigma^2 + \left(\sigma^2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (83.a) \\ m = 1 & \sigma^2 + \left(\sigma^2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 = \left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (83.b) \end{array} \right.$$

FAMILIA N° 3: 'Parámetro' 'n'

$$\left[\begin{array}{ll} n = 0 & \sigma^2 + \left(\sigma^2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \quad (84.a) \\ n = 1 & \sigma^2 + \left(\sigma^2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 = \left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 \quad (84.b) \end{array} \right.$$

→ Los RADIOS de cada circunferencia externa de cada familia son los siguientes:

FAMILIA N° 1: 'Parámetro' 'L'

$$\left[\begin{array}{ll} L = 0 & R_{L=0} = \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) = R_{1,0} \quad (85.a) \\ L = 1 & R_{L=1} = \sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) = R_{1,1} \quad (85.b) \end{array} \right.$$

FAMILIA N° 2: 'Parámetro' 'm'

$$\left[\begin{array}{ll} m = 0 & R_{m=0} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) = R_{2,0} \quad (86.a) \\ m = 1 & R_{m=1} = \sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) = R_{2,1} \quad (86.b) \end{array} \right.$$

FAMILIA N° 3: Parámetro 'n'

$$\left[\begin{array}{l} n=0 \quad R = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = R_{3,0} \quad (82.9) \\ n=1 \quad R_{n=1} = \sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) = R_{3,1} \quad (82.6) \end{array} \right.$$

→ Coordenadas de los Puntos Característicos de las Circunferencias extremas:

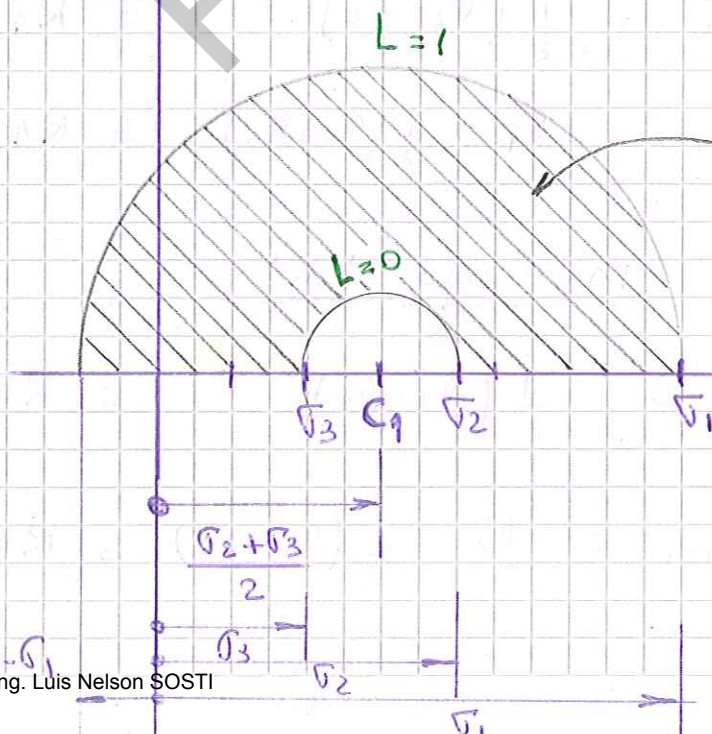
FAMILIA N° 1: Parámetro 'L'

$$\underline{C_1} \equiv \text{centro} \equiv (\sigma_{C,1}; \sigma_{C,1}) \equiv \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0 \right)$$

$$(88) \quad \underline{R=0} \quad R_{L=0} = \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} + \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) = \sigma_2 \\ \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} - \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) = \sigma_3 \end{array} \right.$$

$$\underline{L=1}$$

$$R_{L=1} = \sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} + \sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_1 \\ \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} - \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right] = \\ = \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_1 \\ 4 + 2 - 4 = -1 \end{array} \right.$$



9 Área relida en la cual se puede presentar los tensiones σ y τ de un punto P para el cual todos los planos pertenecen a la familia 1 donde $0 \leq L \leq 1$

Por que de esta área para los tensiones principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ no es posible que un punto para todos los planos se ubique ahí.

Fatiga nº 2 : Parámetro 'm'

$e_2 \equiv \text{centro} \equiv (\sigma_{c,2} ; \tau_{c,2}) \equiv \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0 \right)$

(8º)

$m = 0$

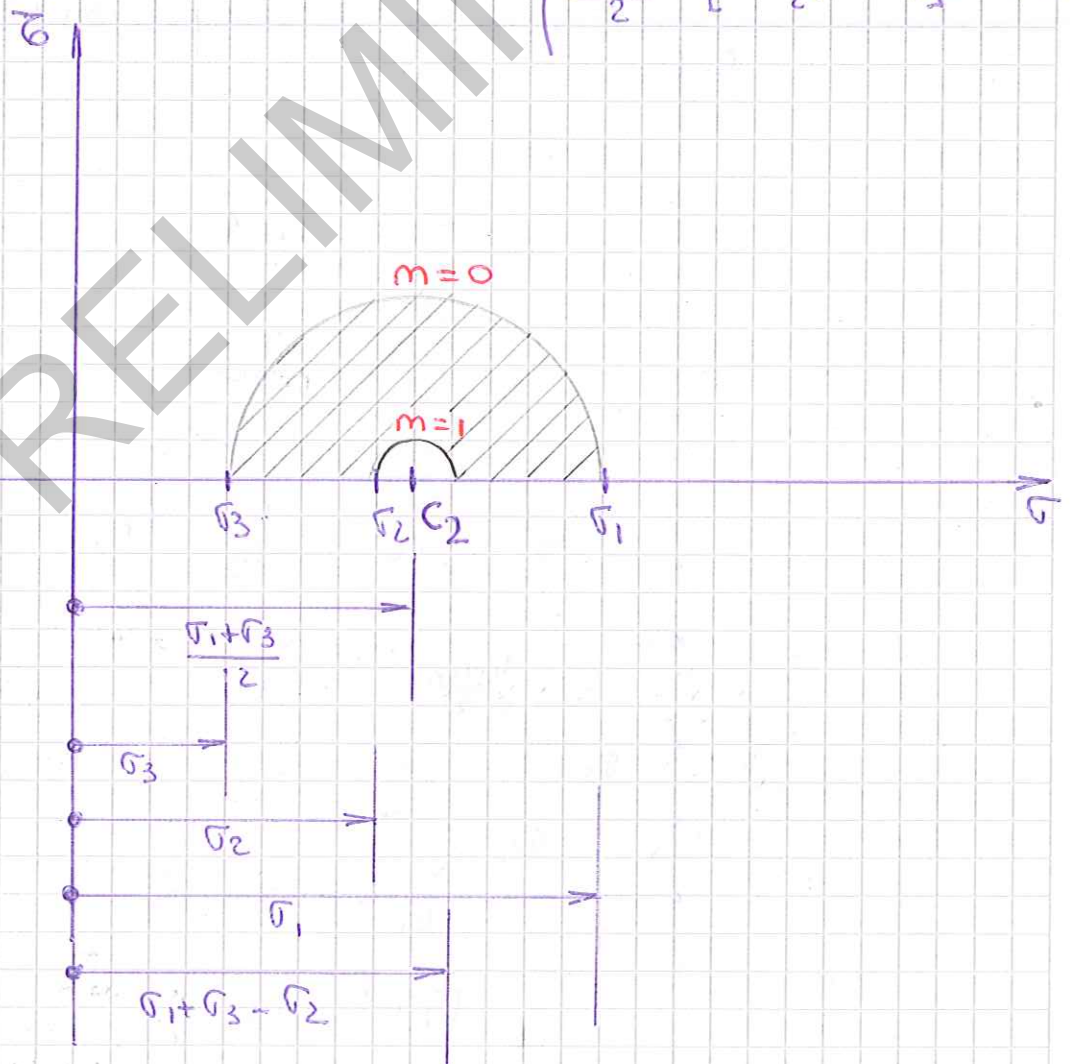
$R_{m=0} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$

$$\begin{cases} \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \sigma_1 \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \sigma_3 \end{cases}$$

$m = 1$

$R_{m=1} = \sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$

$$\begin{cases} \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right] = \sigma_2 \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right] = \sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_2 \end{cases}$$



FAMILIA n° 3 : Parámetro 'n'

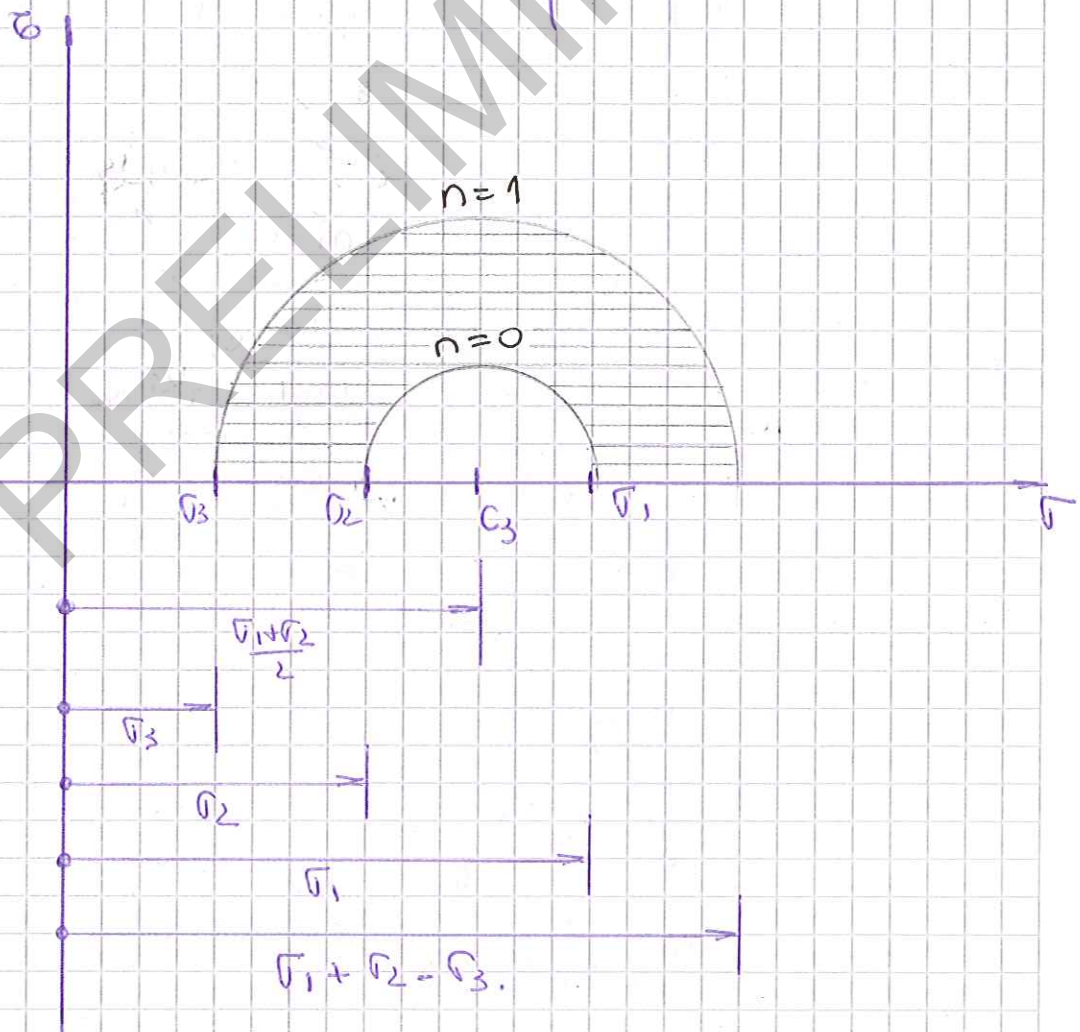
$c_3 \equiv \text{centro} \equiv (\sigma_{c,3}, \tau_{c,3}) \equiv \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right)$

$n=0$

$R_{n=0} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \sigma_1 \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \sigma_2 \end{array} \right.$

$n=1$

$R_{n=1} = \sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_3 \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] = \\ = \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 \end{array} \right.$



→ la figura precedente representa, referida a un sistema de ejes coordenados σ y τ :

→ las circunferencias extremas de las 3 familias

→ En este gráfico, los coordenados de un punto cualquiera P caracterizado por sus tensiones representativas σ_p y τ_p , corresponden a un plano determinado caracterizado por sus ~~ese~~ cosenos directos: (L, m, n) .

la representación de las tensiones del mismo deberá cumplir con el criterio de tal en lo cual se verifica que:

$$0 \leq L_p \leq 1 \quad \wedge \quad 0 \leq m_p \leq 1 \quad \wedge \quad 0 \leq n_p \leq 1$$

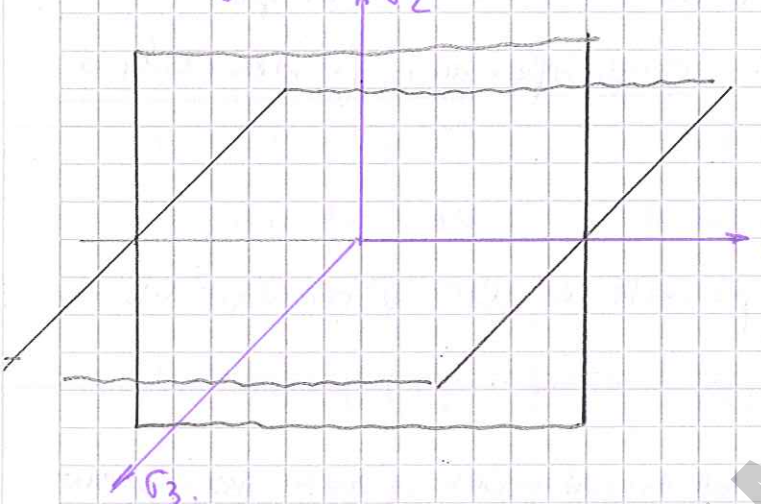
Un punto como P_1 y P_2 y P_3 ^{↓ P_4} no son válidos por lo que ellos la construcción (σ_{pi}, τ_{pi}) no es posible por lo que no pueden estar del eje de intersección que cumple todas las propiedades.

• Es decir, debe ser un punto del interior del triángulo curvilíneo.

• Sobre este punto deberán estar las circunferencias que corresponden a los valores de los parámetros L, m y n que se corresponden al plano considerado. las ecuaciones de estas circunferencias están dadas por las ecuaciones (80) .

CONJUNTOS DE PLANEOS

→ La circunferencia de $l=0$ corresponde a todos los planos cuyo eje nudo es la dirección principal 1. Es decir el eje 1 o la dirección de σ_1 es el eje nudo del conjunto de planos.



para todos estos $l=0$.

(*) Si $l=0$ (para la mayoría de los casos se considera $m=0$ o $n=0$), se tiene que

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 + m^2 + n^2 = 1 \rightarrow$$

$$m^2 + n^2 = 1 \quad \text{existen infinitos}$$

posibles valores que cumplen la ecuación → luego infinitos planos.

→ la circunferencia de $m=0$ → planos corresponden al conjunto de planos cuyo eje nudo es la dirección 2.

→ la circunferencia de $n=0$ → corresponden al conjunto de planos cuyo eje nudo es la dirección 3.

→ la circunferencia de $l=1$ → solo se cumple en 1 solo plano posible el expresado por la dirección σ_2 y σ_3 .

Esto es su propia: $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

Si $l=1 \rightarrow m^2 + n^2 = 0 \rightarrow$ lo único posible es

que $m=n=0$. → Plano correspondiente de σ_2 y σ_3 de normal σ_1 .

→ Igual para la circunferencia de $m=1$ → plano formado por σ_1 y σ_3 .
($n=1 \rightarrow l=0, m=0$) → σ_1 y σ_2 .

→ Ver (*) Así esto lo define a la familia de planos que $l=0$ o $m=0$ o $n=0$ o los tres $m=1$ o $n=1$.

Resolución de problemas con la circunferencia de Mohr:

- Dado un plano cualquier de nivel $\bar{n}$, y axes directores: x, y, z .
- Al mismo le corresponden 3 circunferencias definidas por las expresiones (79) o (80) .
- Asimismo, se conocen las 3 tensiones principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.
- Para estas circunferencias y datos, los radios de las 3 circunferencias están dados por las raíces cuadradas de las 2^{as} miembros de la (79) u (80) ; cuyas expresiones son las siguientes:

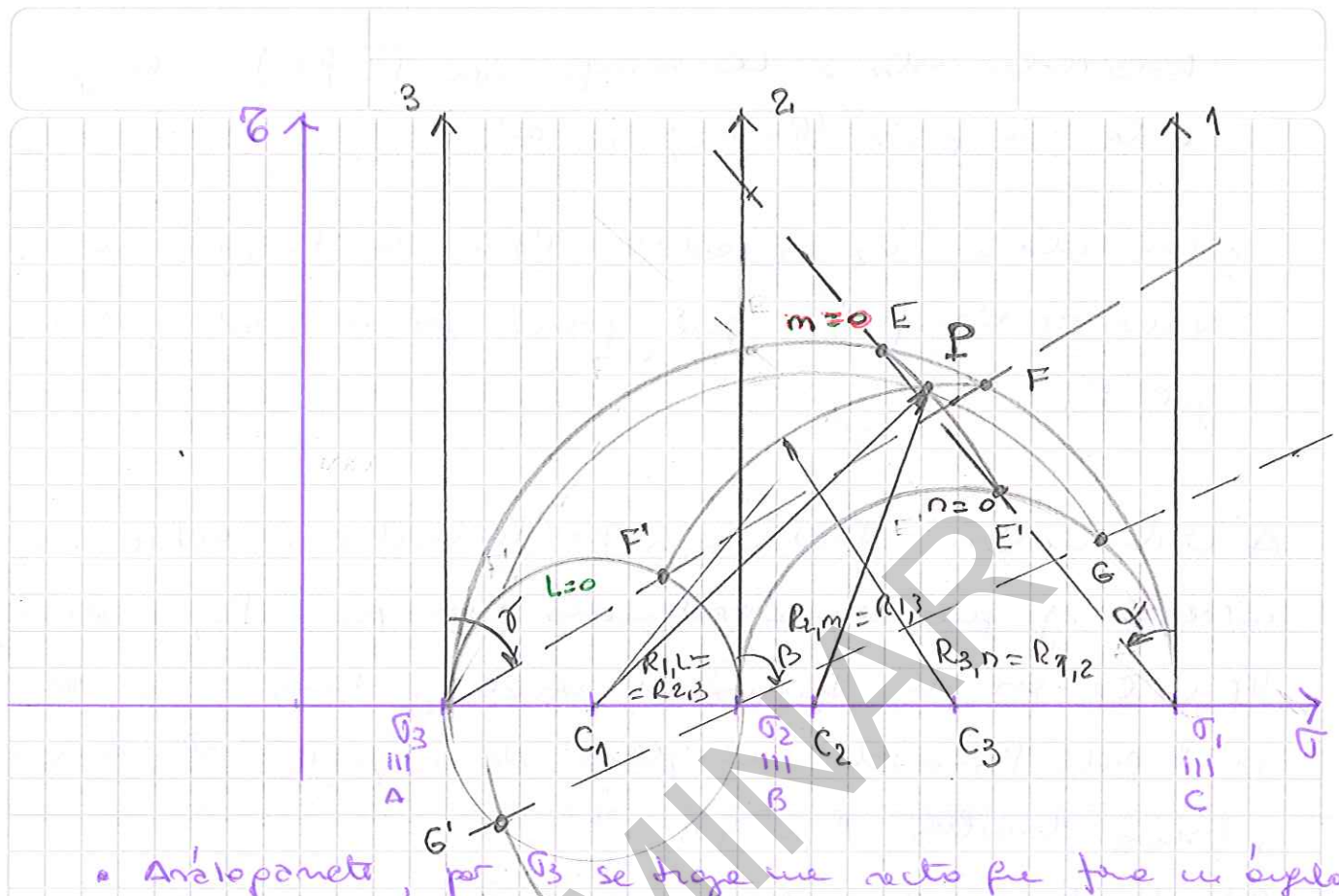
$$R_{1,l} = R_{2,3} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + l^2 (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \quad (91.a)$$

$$R_{2,m} = R_{1,3} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + m^2 (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} \quad (91.b)$$

$$R_{3,n} = R_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + n^2 (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \quad (91.c)$$

- Estas 3 circunferencias se cortan en un punto P de coordenadas (σ_p, τ_p) que coincide a las tensiones normales y tangenciales del plano dado.
- La hipotenusa se calcula en $\tau_p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$

- Otra posibilidad, ~~pero~~ pero definir σ_1, σ_2 ,
 es sin recurrir a la definición de $R_{1,e}, R_{1,m}$ y $R_{1,n}$,
 por ~~definir~~ trazar las 3 circunferencias que determi-
 nan al punto P.
- A continuación se verá como definir el punto P en
 fono propia.
- Supongamos trazadas las 3 circunferencias fundadas en
 diámetros: (σ_1, σ_2) , (σ_1, σ_3) y (σ_2, σ_3)
- En correspondencia con los puntos representativos de σ_1, σ_2
 y σ_3 se levantan 3 normales al eje σ , que representan
 repetidamente a los ejes 1, 2 y 3.
- Datos del problema son los ángulos α, β y γ o sus
 cosenos directos, que forman el nivel el plano en los
 ejes 1, 2 y 3 respectivamente; y cuyos cosenos directos
 son: l, m y n .
- Trazamos por σ_1 una recta que forme un ángulo α con
 el eje σ .
- Esta recta corta a la circunferencia (σ_1, σ_3) en E y a
 la circunferencia (σ_1, σ_2) en E' .
- Con centro en C_1 y radio C_1E se traza un arco de circunfe-
 rencia que pasará por E y E' .



- Análogamente, por σ_3 se traza una recta que forme un ángulo γ con el eje '3'.
Esta recta corta a las circunferencias (σ_1, σ_3) en F y a la (σ_2, σ_3) en F' .
- Con centro en C_3 y radio C_3F se traza un arco de circunferencia que pase por F y F' .
- Ambos arcos se cortan en un punto P cuyas coordenadas serán σ y τ , es decir, las tensiones del punto sometido al plano de corte σ y ángulos α, β y σ y τ o en su defecto l, m y n .
- Asimismo, por σ_2 se traza una recta que forme un ángulo β con el eje '2'. La cual puede ser hacia un lado o hacia el otro. Como los otros casos más hacia lo derecho $\rightarrow$ se hace el círculo en sentido de las manecillas.

Este recto visto a la circunferencia (σ_1, σ_2) en G y a la circunferencia (σ_2, σ_3) en G'

- con auto en C_2 y oculto $C_2 \bar{G}$ se trazó un arco de circunferencia que pasó por G y G' y observó por P .

A continuación demostramos que la construcción anterior es correcta y que las coordenadas del punto P , es decir, σ_P y τ_P son las sumas normales y tangenciales de los en el punto P procedidos al plano de ejes α, β y γ y axes directos l, m y n .

Además, la ley del eje del eje σ_P es precisamente el valor de la tensión resultante $\bar{P}$.

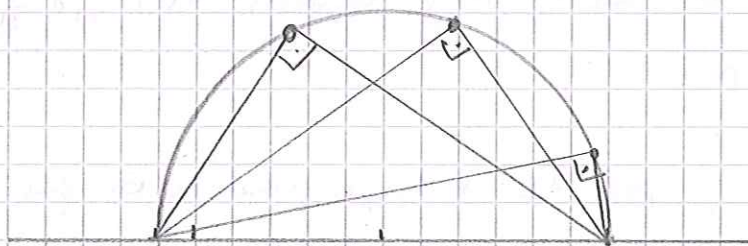
Demostración:

→ Triángulo $\triangle AEC$ se tiene:

$$\overline{AC} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$\triangle AEC$

→ triángulo inscrito en una semi-circunferencia.
 La ^{eje} $\angle$ es recto. Este es el inscrito.



En $\triangle AEC \rightarrow \hat{E} = 90^\circ = \pi/2$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{EC}{AC} \quad \text{pero } \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{EC}{AC} \rightarrow EC = AC \cdot \sin \alpha = (\sigma_1 - \sigma_3) \sin \alpha$$

En definitiva:

$$\overline{EC} = (\sigma_1 - \sigma_3) \sin \alpha. \quad (92)$$

→ Triángulo ECC, de Fieus:

$$\overline{C_1C} = \overline{OC} - \overline{OC_1} = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \quad (93)$$

Por el triángulo del seno y del coseno:

$$\overline{C_1E}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{C_1C}^2 - 2 \cdot \overline{CE} \cdot \overline{C_1C} \cdot \underbrace{\sin \alpha}_{\cos(90^\circ - \alpha) \text{ o recíproco}} \quad (94)$$

Pero por construcción:

$$\overline{C_1E} = \overline{C_1P} \quad \text{y se reemplazan valores:}$$

$$\begin{aligned} \overline{C_1P}^2 &= (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \sin^2 \alpha + \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 - \\ &\quad - 2 (\sigma_1 - \sigma_3) \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right) \cdot \sin^2 \alpha \quad (95) \end{aligned}$$

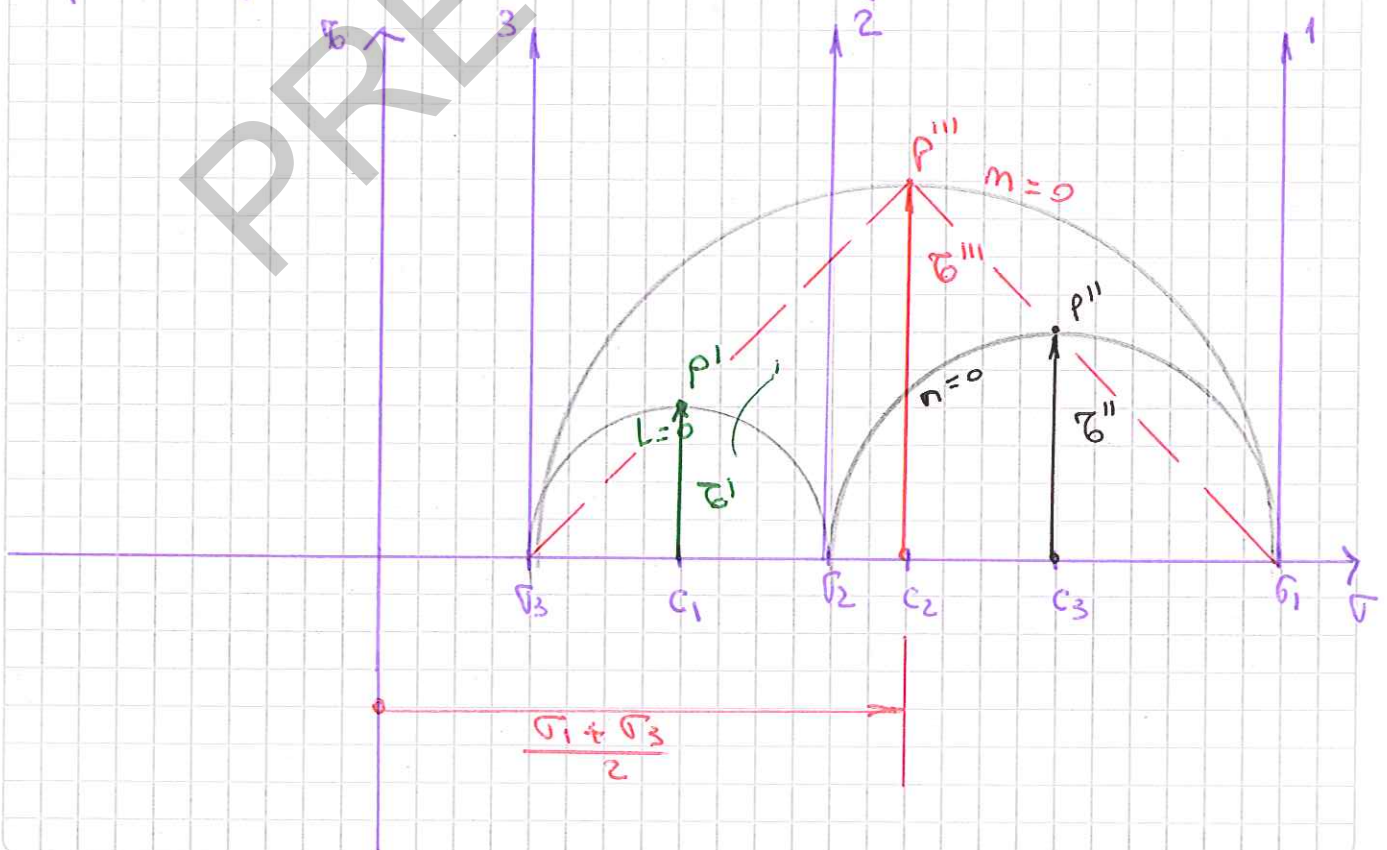
Despejando
W compuesta

- De las 3 circunferencias fundamentales, se acostumbra a llamar: "Circunferencia de MOHR" a la mayor. Es decir, la que tiene por diámetro $(\sigma_1 - \sigma_3)$ y que corresponde al estado de tensión en el hoy de placas que tiene por eje, la dirección de la tensión principal que es σ_2 .

Recordar que su centro es $C_2 = (\sigma_1 + \sigma_3) / 2$

→ Esta circunferencia tiene la propiedad de que los infinitos puntos P representativos de tensiones y son circunferencias a la misma o con sobre ella.

- Si se observa la siguiente figura, se observa que para cada circunferencia fundamental existe un punto P al que corresponde la máxima tensión tangencial relativa.



- Dados puntos se encuentran sobre la vertical del centro de cada circunferencia y sus valores son:

$$\sigma' = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

$$\sigma'' = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$\sigma''' = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

(100).

- De los 3 valores $\sigma''' = \sigma_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, el cual

es independiente de la tensión intermedia σ_2 y ocurrirá en planos inclinados a 45° con respecto de los planos principales.

Para dichos planos el valor de la tensión normal es:

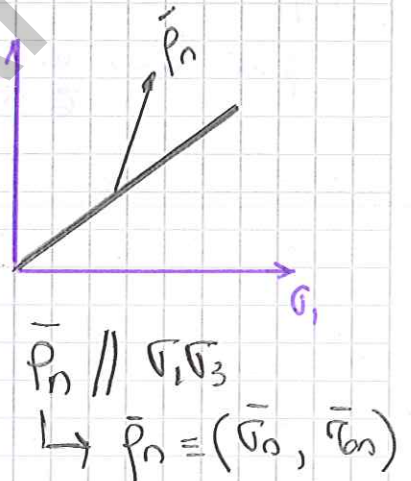
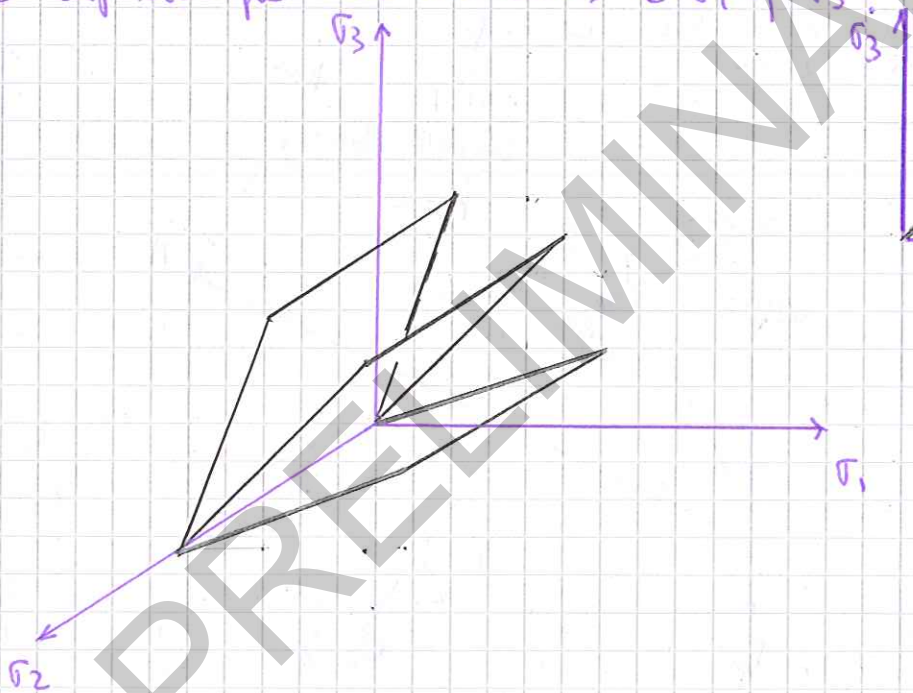
$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

(101)

ESTADO DE TENSION CORRESPONDIENTE AL HABER 80 PLANOS CUYO EJE ES LA DIRECCION PRINCIPAL: ESTADO CUANTO.

Supongamos un haz de planos que pase el punto $A \equiv O$ y que tenga por eje exterior la dirección principal 2.

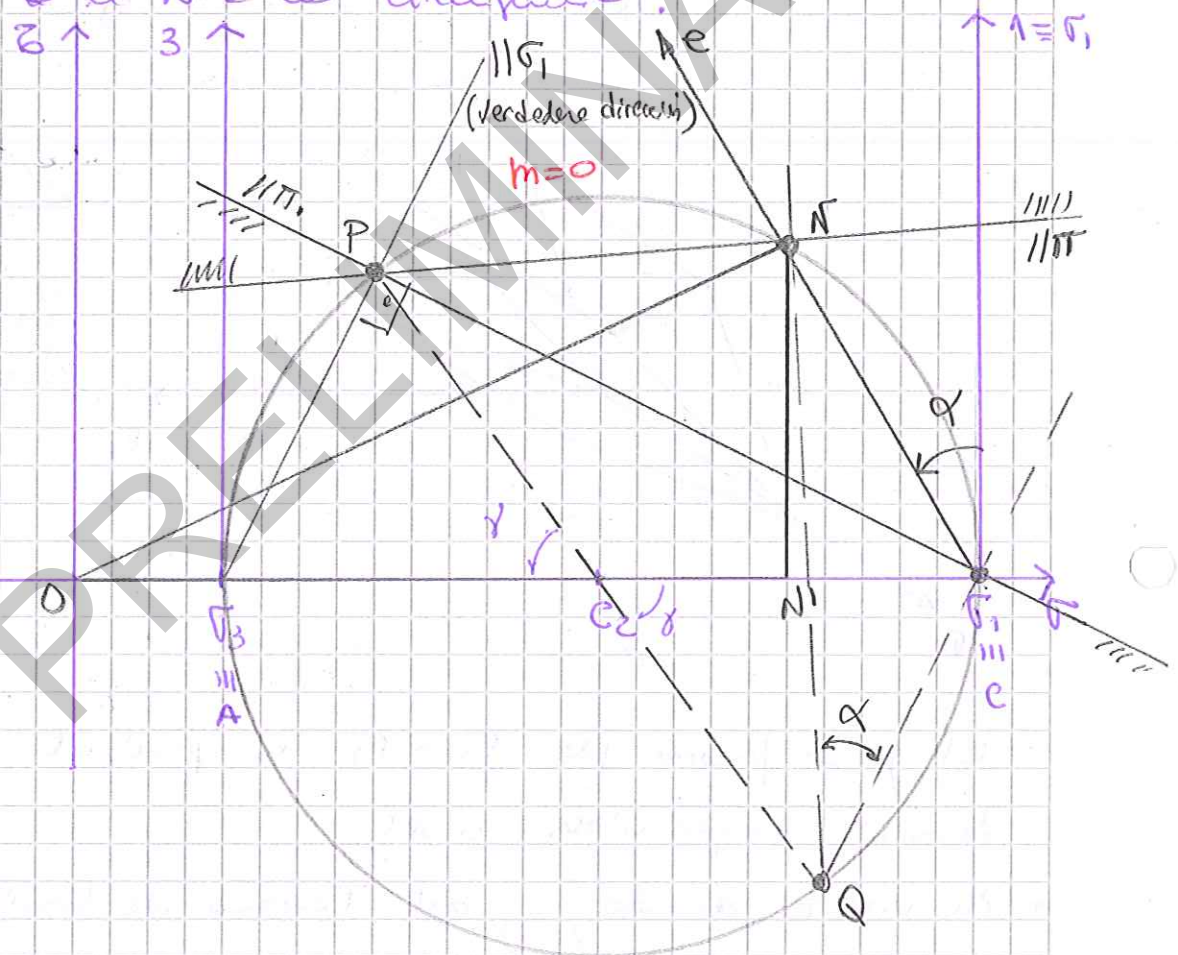
Dichos planos resulten, en consecuencia, todos el plano principal definido por las direcciones σ_1 y σ_3 .



El plano formado por σ_1 y σ_3 es principal $\rightarrow$ no hay tensiones tangenciales en él.

- En virtud de esto, y del Teorema de Lamé, las tensiones resultantes de los planos del haz de planos son paralelos al plano principal $\sigma_1 - \sigma_3 \rightarrow$ si no fuera así habría una componente de la tensión tangencial $\perp$ al plano σ_1 y σ_3 , por Lamé esta habría σ_2 , lo cual es imposible x es principal. En el haz σ_2 es $\parallel$ a $\sigma_1 \sigma_3$.
- Para cualquiera de los planos del haz de planos, el ángulo directo respecto a σ_2 es $\alpha = 0^\circ$ y obviamente $\mu = 0$.

- Para este caso particular, el lugar geométrico de los puntos P que definen las tensiones en los planos del eje cuyo eje rotar a la dirección σ_2 , será la circunferencia (σ_1, σ_3)
- Si se quiere hallar el punto N , representativo de las tensiones que ocurren en un plano π de normal exterior e , bastará trazar por e la recta e que forme con la dirección $1 \equiv \sigma_1$ el ángulo de inclinación α que este e tiene con la circunferencia.



- Obviamente, el punto N estará sobre la circunferencia de $m=0$ porque pertenece al eje de ejes cuyo eje rotar tiene dirección 2 .

- las coordenadas de N serían: $N \equiv \sigma(\overline{ON'}, N'N)$ y representar respectivamente: σ y τ :

$$\overline{ON'} \equiv \sigma.$$

$$N'N \equiv \tau.$$

que actúan en el plano π de nivel e .

- los trazos del haz de planos de eje $G_2 \equiv Z$ forman el haz de rectas del ^{de} punto C' .
- Supongamos que por A llevamos una paralela a la verdadera dirección de σ_1 .
- Por C' se lleva una normal a la recta. En cualquier punto de $\parallel \sigma_1$ onto a la circunferencia de nivel, se obtiene un punto P . Al punto C' con P se traza un triángulo isósceles en medio circunferencia y un círculo isósceles a $1/2$ circunferencia y se obtiene el recto.
- la recta CP coincidirá con la traza del plano principal π_1 en que actúa σ_1 . Esto es así por $\parallel \sigma_1$ y $\parallel \pi_1$ son $\perp$ y la traza del plano es $\perp$ a π_1 normal, entonces,
- Al punto P , donde se cruzan ambas rectas, la $\parallel$ a la dirección de σ_1 y la traza del plano donde actúa σ_1 , se lo denomina: PRIMER POLO DE MOHR.
- Este punto P es el centro de la rotación de rectas del haz de planos analizados.

- Si por P trazamos una $\parallel$ a la traza de uno de los planos considerados, el π por ejemplo, lo uniremos a $\hat{C}$ la circunferencia en N , cuya coordenada ~~sea~~ coincida con la misma normal y tangencial que actúan en π .

demostración:

- Consideremos un punto Q diametral de P .
- Unase Q con N y con C , resulta el ángulo $\hat{CQN}$.
- El ángulo $\hat{CQN}$ está inscrito en el arco $\widehat{CN}$.
- α está semi-inscrito en el mismo arco. luego:
 $\alpha = \hat{CQN}$.
- $\overline{QC}$ es paralela a la propia dirección de σ_1 (fácil de ver por igualdad de triángulos ①).
- luego NQ resulta ser la dirección de la normal $\hat{e}$ del elemento plano considerado $\rightarrow$ Es así por: $\overline{QC} \parallel \sigma_1$ y NQ forma un ángulo α con $\overline{QC}$, y el σ_1 $\rightarrow$ $\hat{e}$ que es $\hat{e}$ en 1 .
- El ángulo $\hat{PQ}P'Q$ es recto en N (inscrito en una semi-circunferencia) $\rightarrow$ luego $PN \perp NQ \rightarrow$
 $\rightarrow$ luego $PN \parallel$ a la traza de π .

① 2 triángulos $\triangle APC_2$ y $\triangle QQC_2$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{PC_2} \equiv \overline{QC_2} = R(\text{radio}) \equiv \overline{AC_2} \equiv \overline{CC_2} \\ \angle = \angle \text{ por opuestos.} \end{array} \right\} \rightarrow \overline{AP} \equiv \overline{CQ}$$