Estabilidad IIA

Relación entre tensiones y deformaciones.

Relación entre tensiones y deformaciones

Emisión 01
Agosto 2001

1.- Introducción

Se ha analizado hasta ahora la descripción estática de lo que ocurre en el interior de un sistema continuo sometido a la acción de una causa deformante.

El lenguaje utilizado para esta descripción se ha basado en la definición del concepto de tensión en un plano que pasa por un punto y su generalización, con independencia del sistema de coordenadas utilizado, mediante la definición del ***estado de tensión.***

También se ha visto que la determinación de las tensiones en cualquier punto de una sección transversal de una barra no puede ser efectuada mediante las ecuaciones que suministra la estática dado que el número de incógnitas es superior al número de ecuaciones disponibles. Se trata, por lo tanto, de resolver un problema hiperestático.

Las ecuaciones, son según lo visto, las ecuaciones de equilibrio de un medio continuo y mediante ellas se puede contar con tres ecuaciones diferenciales para cada punto del continuo requiriéndose conocer 6 tensiones para definir el estado de tensión.

Asimismo se ha descripto el estado de corrimientos en las infinitas direcciones y el entorno asociado a un punto de un medio continuo. Este estado estará compuesto de traslaciones y rotaciones rígidas y de movimientos debidos a los cambios de forma que experimente el sistema.

Estos cambios de forma se han descripto mediante el ***estado de deformación*** en un punto del continuo.

Tanto el estado de tensiones, como el estado de deformaciones, se definieron en base a correspondientes tensores que requerían el conocimiento de seis parámetros por punto.

Estos seis parámetros pueden ser ordenados en términos de un vector, con el cuidado de no confundir a estos vectores con los que se han utilizado para definir la tensión asociada a un plano o bien la deformación asociada a una determinada dirección.

Se identificarán como vector estado de tensión y vector estado de deformación a cada uno de estos vectores cuyas componentes se detallan a continuación. Cabe destacar que estas componentes están referidas a un mismo sistema de coordenadas.

Vector estado de tensión:

$$\{\Gamma_A\} = \{\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ \tau_{xy},\ \tau_{yz},\ \tau_{zx}\}^t$$

Vector estado de deformación:

$$\{\psi_A\} = \{\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_z,\ \gamma_{xy},\ \gamma_{yz},\ \gamma_{zx}\}^t$$

Estos vectores se pueden asociar a las partes infinitésimas en que se puede descomponer el continuo en análisis.

A esta parte se la puede imaginar como un cubo elemental de lados **dx**, **dy** y **dz** sometidos en cada una de sus caras a fuerzas que permiten definir las tensiones que se registran en el vector estado de tensión.

Asimismo es posible asumir que las aristas del cubo sufrirán los corrimientos relativos que se pueden describir mediante el vector estado de deformación.

Si se admite que estos corrimientos relativos pueden ser originados por las fuerzas mencionadas se podrá plantear entre ambos conjuntos de magnitudes una relación de causa y efecto.

Si se considera válido el ***principio de causalidad*** se puede plantear una relación totalmente genérica entre el vector estado de deformación y el vector estado de tensión.

$$\{\psi_A\} = \mathbf{f}\,(\{\Gamma_A\})$$

lo cual puede ser escrito para una mejor visualización de la siguiente manera:

$$\{\psi_A\} = [\mathbf{F}_A] \,.\, \{\Gamma_A\}$$

La matriz $[\mathbf{F}_A]$ define la relación entre ambas magnitudes. Los términos de esta matriz pueden ser funciones totalmente genéricas.

Si se considera válida la ***superposición de efectos*** generados por cada una de las componentes de las acciones actuando independientemente una de las otras los elementos de la matriz $[\mathbf{F}_A]$ deben ser constantes para cada uno de los ***puntos*** o ***partes*** del continuo consideradas.

La matriz $[\mathbf{F}_A]$ es una matriz de ***flexibilidad*** pues cada uno de sus elementos nos suministra un tipo de deformación que es producida por una acción estática (tensión) unitaria y positiva. Cuanto mayor sea su valor mayor será la deformabilidad del elemento en estudio. Este hecho le da sentido al nombre escogido.

Resulta de utilidad plantear también la relación inversa, es decir suponer que la acción es la deformación y el efecto es la tensión en cuyo caso se obtiene:

$$\{\Gamma_A\} = [\mathbf{R}_A] \,.\, \{\psi_A\}$$

La matriz $[\mathbf{R}_A]$ se la identifica como una matriz de ***rigidez*** puesto que cada uno de sus elementos nos da idea del efecto estático que se genera cuando se aplica una deformación de valor unitario y positiva. Cuanto mayor sea este efecto menor será la deformabilidad del sistema.

Es evidente que las características de la relación planteada entre el vector estado de tensión y el vector estado de deformación no pueden ser definidas teóricamente dado que hacen al mundo real para el cual la misma se plantea.

El tipo de relación y las particularidades de la misma dependen de los materiales constitutivos del sistema en análisis. Para justificar esta afirmación basta imaginarse un elemento finito como puede ser una goma de borrar y aplicarle con los dedos un estado de tensión en dos de sus caras externas y apreciar que el cambio de forma que se produce es totalmente distinto que si hubiésemos efectuado la misma experiencia con un volumen igual de acero.

Se deberá recurrir a la investigación experimental sistemática del comportamiento de los materiales para obtener la información necesaria para elegir el tipo de relación que se puede plantear y los parámetros que la definen.

A las matrices planteadas para determinar la relación entre tensiones y deformaciones se las denomina ***matrices constitutivas*** dado que dependen de la constitución del material cuyas propiedades mecánicas representan.

Antes de recurrir a esta experiencia se definirá un tipo de relación entre las componentes del estado de tensión y el estado de deformación de gran utilidad para la interpretación del problema en estudio.

2.- Trabajo de deformación

Resulta de sumo interés para un mejor análisis del comportamiento de un sistema tratar de interpretar a cualquier transformación desde el punto de vista energético.

Una acción deformante originará en el sistema un pasaje desde un estado inicial de equilibrio a una posición final también de equilibrio durante la cual todas las magnitudes estáticas que definen el estado de tensión y todas las magnitudes cinemáticas que definen el estado de deformación en los infinitos puntos del continuo experimentaran variaciones hasta alcanzar los valores finales.

Tal como se ha planteado como hipótesis se asume que durante esta transformación la variación de velocidad con que se modifican las magnitudes cinemáticas es lo suficientemente pequeña como para generar efectos dinámicos despreciables por lo cual se habla de transformaciones ***cuasi estáticas.***

Para seguir una evolución se considerará un elemento o parte diferencial del sistema de lados de longitud inicial **dx**, **dy** y **dz** tal como se indica en la Figura 1.

Durante la transformación en cada uno de los planos que delimitan el volumen se originaran tensiones debidas a las fuerzas que mantendrán el equilibro del mismo y se producirán corrimientos relativos entre las caras que justifican el cambio de forma que experimenta.

A los efectos de simplificar el análisis se asumirá, en un primer paso, que sólo existan fuerzas actuando en la dirección del eje **x** tal como se muestra en la Figura 2

Las fuerzas que actúan en los dos planos de normal **x**, van a realizar un trabajo debido al corrimiento que experimentan los planos sobre los que las mismas actúan. Realizaran trabajo en los corrimientos de dirección perpendicular al plano. Estos corrimientos debido a la deformación que experimenta el sistema en torno al punto **A** pueden ser determinados en base a la deformación longitudinal específica ε_x

Para determinar la variación de este trabajo, cuando las fuerzas son variables en función de los desplazamientos, se puede suponer que las fuerzas permanecen constantes durante una variación infinitésima del corrimiento y luego proceder a la integración a lo largo de la evolución.

Nótese que el volumen se ha representado manteniendo la posición del punto A invariable lo cual implica que se registran todos los corrimientos con respecto a este punto. Dado que se investigan corrimientos relativos este tipo de representaciones es aplicable sin generar confusiones. Con este esquema de razonamiento los planos que definen las caras que pasan por el origen no experimentan corrimientos y los que registraran el trabajo que se realiza serán todos aquellos que no pasan por el punto A.

En la figura no se han representado los cambios de forma debidos a las distorsiones para no complicar la figura. Los corrimientos que generan las distorsiones son perpendiculares a las fuerzas consideradas por lo tanto el trabajo que se produciría en los mismos sería nulo.

La variación de trabajo generado en la coordenada **x** será igual a:

$$\delta L_x = [(\sigma_x + \partial\sigma_x/\partial x \;.\; dx) \;.\; dy.\, dz] \;.\; dx \;.\; \delta\varepsilon_x$$

Es fácil apreciar que el segundo sumando es un infinitésimo de orden superior frente al primer sumando por lo cual se puede expresar el trabajo en la coordenada **x** como:

$$\delta L_x = (\sigma_x) \;.\; dy.\, dz \;.\; dx \;.\; \delta\varepsilon_x$$

y además

$$\delta L_y = (\sigma_y) \,.\, dy.\, dz \,.\, dx \,.\, \delta\varepsilon_y$$

$$\delta L_z = (\sigma_z) \,.\, dy.\, dz \,.\, dx \,.\, \delta\varepsilon_z$$

o bien considerando que el volumen inicial del elemento es **dx.dy.dz**

$$\delta L_x = \sigma_x \,.\, \delta\varepsilon_x \,.\, dv$$

De igual forma se pudo haber razonado con las fuerzas perpendiculares a los otros dos planos obteniendo:

$$\delta L_y = \sigma_y \,.\, \delta\varepsilon_y \,.\, dv \qquad \delta L_z = \sigma_z \,.\, \delta\varepsilon_z \,.\, dv$$

Se analiza seguidamente el comportamiento de las fuerzas que actúan en los planos y que dan lugar a las diferentes tensiones tangenciales.

En la Figura 3 se indican las fuerzas tangenciales asociadas a los planos **x** e **y** de direcciones contenidas en el plano **z**.

Despreciando los infinitésimos de orden superior en la tensión tangencial se puede definir la componente del trabajo en la coordenada **xy** como:

$$\delta L_{xy} = \tau_{xy} \,.\, dy.\, dz \,.(\delta\gamma_{xy}/2) \,.\, dx + \tau_{yx} \,.\, dx.\, dz \,.(\delta\gamma_{yx}/2) \,.\, dy$$

O bien

$$\delta L_{xy} = \tau_{xy} \,.\, \delta\gamma_{xy} \,.\, dv$$

Extendiendo el razonamiento a las restantes componentes se puede expresar:

$$\delta L_{yz} = \tau_{yz} \,.\, \delta\gamma_{yz} \,.\, dv$$

$$\delta L_{zx} = \tau_{zx} \,.\, \delta\gamma_{zx} \,.\, dv$$

La variación del trabajo esta dado por la suma de las diversas componentes determinadas.

$$\delta L = \delta L_x + \delta L_y + \delta L_z + \delta L_{xy} + \delta L_{yz} + \delta L_{zx} \qquad [1]$$

Lo cual se puede expresar matricialmente como:

$$\delta L_{\varepsilon,v} = \{\Gamma\}^t . \{\delta\psi\} \,.\, dv$$

La obtención del trabajo realizado sobre este elemento entre la posición inicial y final podrá determinarse mediante la integración a lo largo de la evolución de la deformación y, para todo el sistema, extendiendo la integral a la totalidad de los infinitos puntos o partes consideradas.

Esta integral se puede considerar separada en dos etapas, la primera de ellas extendida al volumen en análisis con lo cual se estaría determinando el trabajo realizado por unidad de volumen, y la segunda extendida a la totalidad del volumen. Seguidamente se razonará sobre la primera de estas variaciones para luego extender las conclusiones:

$$\delta L_\varepsilon/dv = \{\Gamma\}^t . \{\delta\psi\}$$
$$\int_i^f \delta L/dv = \int_i^f \int_v \{\Gamma\}^t . \{\delta\psi\}\, dv$$

El trabajo por unidad de volumen realizado en la transformación planteada es el trabajo que han realizado las fuerzas exteriores al elemento infinitésimo considerado. Estas fuerzas son exteriores para la parte considerada pero interiores del sistema en análisis. La calificación de las mismas es función de la posición del observador.

Dado que el trabajo realizado es consecuencia de la deformación que experimentó la parte considerada y la misma tiene carácter infinitésimo se define a éste como ***trabajo de deformación por unidad de volumen***. La integración de este trabajo a la totalidad del sistema permitiría obtener el trabajo de deformación total o bien ***trabajo de deformación*** en la transformación considerada.

Si bien se volverá más adelante sobre el tema, en base al conocimiento que tienen los estudiantes del Principio de conservación de la energía, pueden formularse dos preguntas:

1.- ¿En que se ha transformado el trabajo de deformación que ha realizado el sistema?

Ésta pregunta puede ser respondida si se piensa que cada parte analizada tuvo que haber realizado un trabajo interno igual y opuesto al de deformación por el principio de acción y reacción. Este trabajo, si el sistema tiene capacidad de almacenar energía se habrá transformado en energía interna de deformación y si no tiene capacidad de almacenamiento se habrá transformado en calor.

Llamando **U** a la ***energía interna de deformación*** y **Q** al calor disipado por el sistema se podrá plantear para cualquier transformación en el mismo:

$$\mathbf{L} = \Delta \mathbf{U} + \mathbf{Q} \qquad [2]$$

que no es más que una expresión del **Primer Principio de la Termodinámica**

En términos mecánicos propios del análisis estructural la transformación de energía interna en trabajo de deformación es posible pero no es totalmente válida la transformación de calor en trabajo de deformación por lo cual se puede considerar que la transformación de trabajo en calor es irreversible.

Existen materiales que presentan un comportamiento altamente reversible mientras que otros no. Se volverá oportunamente sobre este tema.

Como hipótesis simplificativa se adoptará en muchos casos que la respuesta del material sea totalmente reversible. Este tipo de comportamiento se lo identificará como ***comportamiento conservativo***. En estos casos en la expresión [2] para cualquier transformación se tendrá **Q** = 0.

2.- ¿Quién aportó la energía para la realización del trabajo de deformación?.

El trabajo de deformación ha sido obtenido por integración del trabajo externo que se realizó sobre las infinitas partes que componen el sistema.

Este trabajo lo realizaron fuerzas en deformaciones que experimentó el sistema durante la transformación y que, como se ha planteado, tienen su origen en las causas deformantes que han actuado. Es intuitivo señalar que el trabajo de deformación deberá ser igual al trabajo que han realizado esas acciones.

A esta igualdad se la identifica como ***principio de equivalencia.*** Lo expuesto puede expresarse matemáticamente como:

$$\mathbf{L} = \sum \int_i^f \{\mathbf{C_i}\}^{\mathbf{t}}.\{\mathbf{a_i}\}$$

Donde $\mathbf{C_i}$ son las acciones estáticas externas -activas o reactivas- y $\mathbf{a_i}$ son los corrimientos de los puntos de aplicación de las $\mathbf{C_i}$ producidos durante la transformación. - Lo anterior podría interpretarse también considerando a los corrimientos $\mathbf{a_i}$ como acciones -.

Oportunamente se volverá sobre este tema.

De lo visto se puede expresar, cuando el sistema es conservativo, a la energía interna de deformación por unidad de volumen como una función del vector estado de deformación:

$$\mathbf{U_V} = \boldsymbol{\delta}\mathbf{U}/\boldsymbol{\delta}\mathbf{v} = f\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}$$

Desarrollando en serie de Taylor se obtiene

$$d\mathbf{U_V} = \partial \mathbf{U_V}/\partial\varepsilon_x . d\varepsilon_x + \partial \mathbf{U_V}/\delta\varepsilon_y . d\varepsilon_y + \partial \mathbf{U_V}/\partial\varepsilon_z . d\varepsilon_z + \partial \mathbf{U_V}/\partial\gamma_{xy} . d\gamma_{xy} +$$
$$\partial \mathbf{U_V}/\partial\gamma_{yz} . d\delta\gamma_{yz} + \partial \mathbf{U_V}/\partial\gamma_{zx} d\gamma_{zx}$$

Esta expresión es totalmente análoga a la expresión [1] si se reemplaza:

$\partial \mathbf{U_V}/\partial\varepsilon_x = \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{x}$ [3.1] $\quad \partial \mathbf{U_V}/\partial\varepsilon_y = \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{y}$ [3.2] $\quad \partial \mathbf{U_V}/\partial\varepsilon_z = \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{z}$ [3.3]

$\partial \mathbf{U_V}/\partial\gamma_{xy} = \boldsymbol{\tau}_\mathbf{xy}$ [3.4] $\quad \partial \mathbf{U_V}/\partial\gamma_{yz} = \boldsymbol{\tau}_\mathbf{yz}$ [3.5] $\quad \partial \mathbf{U_V}/\partial\gamma_{zx} = \boldsymbol{\tau}_\mathbf{zx}$ [3.6]

De donde se desprende que las funciones tensión pueden ser expresadas en función de derivadas parciales de la función energía por unidad de volumen en el punto considerado.

3.- Hipótesis de Hooke

Se ha visto más arriba que la relación entre tensiones y deformaciones en un sistema debía plantearse para los infinitos puntos que lo componen y según la hipótesis que se formulara era necesario conocer para definirla en cada punto 6 funciones o bien 6 parámetros en el supuesto más simple en el cual las funciones se redujesen a una constante.

El problema planteado con esta generalidad ofrece un grado de complicación sumamente elevado lo que llevó a formular hipótesis simplificativas que asentadas en la observación del comportamiento de determinados materiales pretendían obtener modelos matemáticos abordables con las herramientas de cálculo disponibles.

Hooke, en 1660, luego publicada en 1676 formuló la relación constitutiva para los sólidos de mayor difusión la cual fue posteriormente utilizada por Cauchy quien desarrolló los conceptos de tensión y deformación específica.

(Hooke expuso que "la fuerza de cualquier cuerpo con características de resorte está en relación con su extensión")

El concepto fundamental de esta hipótesis es la relación lineal existente entre las tensiones y las deformaciones hecho que permite asignar coeficientes constantes a los elementos de las matrices $[\mathbf{F}_A]$ y $[\mathbf{R}_A]$ oportunamente definidas. A esta hipótesis se la conoce como ***Linealidad Mecánica (LM)***.

Con esta hipótesis se requeriría conocer los 36 coeficientes de estas matrices en cada uno de los puntos del sistema en análisis para poder plantear la relación entre tensiones y deformaciones.

Si el material componente del sistema es ***homogéneo*** es decir que tiene iguales propiedades en todos sus puntos las matrices $[\mathbf{F}_A]$ y $[\mathbf{R}_A]$ serán iguales en todos los puntos del sistema con lo cual simplemente se puede identificarlas como $[\mathbf{F}]$ y $[\mathbf{R}]$.

Con esta hipótesis se reduce sustancialmente el número de parámetros necesarios para describir el comportamiento mecánico del mismo.

No todos los materiales son homogéneos ni todas las estructuras están compuestas por materiales homogéneos o bien por el mismo material.

Es decir que pueden existir materiales con distintas propiedades en distintos puntos lo cual genera una heterogeneidad propia del material o bien puede existir en la estructura materiales homogéneos pero distintos. Se verán ejemplos de este tipo más adelante.

Utilizando otra propiedad de algunos materiales se pueden reducir el número de parámetros requeridos para definir las matrices constitutivas. Una de estas propiedades es la correspondiente al comportamiento ***conservativo*** del material.

Se puede demostrar que, si el material es conservativo, la matriz $[\mathbf{R}_A]$ es simétrica.
En efecto si se considera un elemento genérico del vector $\{\Gamma_A\}$ por ejemplo el correspondiente al elemento "4" igual a τ_{xy}, el elemento de la matriz $[\mathbf{R}_A]$ que lo vincula con el elemento "1" del vector $\{\psi_A\}$, ε_x, será el elemento "r_{41}" el cual, en base a la relación lineal planteada, podrá expresarse como:

$$r_{41} = \delta\tau_{xy}/\delta\varepsilon_x$$

De [3.4] surge que:

$$r_{41} = \delta^2 \upsilon_v / \delta\gamma_{xy}\delta\varepsilon_x$$

Con un razonamiento análogo se puede definir

$$r_{14} = \delta\sigma_{x,}/\delta\gamma_{xy}$$

y de [3.1]

$$r_{14} = \delta^2 \upsilon_v / \delta\varepsilon_x\delta\gamma_{xy}$$

lo que demuestra la igualdad de los elementos simétricos. Este razonamiento se puede generalizar para los restantes elementos ubicados fuera de la diagonal principal justificando la simetría planteada.

Si la matriz $[\mathbf{R}_A]$ es simétrica se puede demostrar que siempre existirá la matriz inversa la cual es $[\mathbf{F}_A]$.

Lo expuesto permite generalizar lo ya señalado sobre la consideración de las tensiones o deformaciones como causas o efectos en forma indistinta desde un punto de vista matemático dado que siempre es posible conocido el estado de tensión o de deformación determinar respectivamente el de deformación o de tensión asociado.

En base a lo expuesto el número de parámetros cuyo conocimiento se requiere en cada punto se reduce a 21.

Seguidamente se verán otras propiedades que posibilitan simplificar el número de parámetros que es necesario conocer para determinar la relación entre tensiones y deformaciones.

Otra propiedad que posibilita introducir una significativa simplificación en las matrices constitutivas es la ***isotropía.*** Se define un material isótropo como aquel que tiene iguales propiedades mecánicas en todas las direcciones.

Esta propiedad implica que las matrices constitutivas vistas no modifican sus características cualesquiera sea el sistema de coordenadas que se adopte.

Sea la matriz $[\mathbf{F}]$ cuyos elementos vinculan deformaciones con tensiones.

$$\begin{matrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35} & f_{36} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} \end{matrix}$$

La matriz puede descomponerse en cuatro submatrices una de ellas que se identificará como] [F_{dl}] vincula deformaciones específicas longitudinales con tensiones normales, otra que se identificará como [F_{da}] vincula distorsiones angulares específicas con tensiones tangenciales, y las otras dos vinculan deformaciones específicas longitudinales con tensiones tangenciales [F_{la}] y distorsiones angulares específicas con tensiones normales [F_{al}]

$$\begin{matrix} [F_{dl}] & [F_{la}] \\ [F_{al}] & [F_{da}] \end{matrix}$$

Los elementos de esta matriz no deben experimentar cambios si se modifica el sistema de coordenadas de referencia.

La convención de signos asociada a la matriz [F_{dl}] es independiente del sistema de referencia dado que su signo depende de magnitudes relativas de fuerzas o de corrimientos relativos -compresión o tracción, alargamiento o acortamiento relativo -

La convención asociada con las tensiones tangenciales y con las distorsiones angulares depende del sentido de los ejes de referencia.

Si se cambia, por ejemplo, el sentido positivo del eje **x** los elementos $\mathbf{f_{14}}$, $\mathbf{f_{16}}$, $\mathbf{f_{26}}$, $\mathbf{f_{36}}$, $\mathbf{f_{45}}$, $\mathbf{f_{46}}$, y sus simétricos deberían cambiar por este motivo. Dado que por hipótesis de isotropía esto no puede ocurrir los mismos deben ser nulos.

Con un razonamiento análogo para los ejes **y** y **z** se justifica la nulidad de los elementos $\mathbf{f_{15}}$, $\mathbf{f_{24}}$, $\mathbf{f_{25}}$, $\mathbf{f_{34}}$, $\mathbf{f_{35}}$, $\mathbf{f_{56}}$ y sus simétricos.

La anulación de estos elementos implica la anulación de las submatrices [F_{la}] y [F_{al}] y la transformación de la submatriz [F_{da}] se transforma en una matriz diagonal.

Puesto que la matriz [**F**] debe permanecer igual en toda transformación los elementos de la diagonal principal de la submatriz [F_{dl}] deben ser iguales entre sí. Asimismo los elementos fuera de la diagonal principal deben también ser iguales entre sí. De la misma manera los elementos de la submatriz [F_{da}] deben ser iguales.

En base a lo expuesto la matriz [**F**] se transforma en la siguiente matriz.

$$\begin{matrix} f_{11} & f_{12} & f_{12} & 0 & 0 & 0 \\ f_{21} & f_{11} & f_{12} & 0 & 0 & 0 \\ f_{12} & f_{12} & f_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{44} \end{matrix}$$

Donde existen solamente tres elementos diferentes.

El trabajo de deformación que se realiza en una cierta transformación debe ser independiente del sistema de representación. Es la invariante de esa transformación, por lo tanto si se registra el mismo en dos sistemas de coordenadas se podría proceder a su igualación.

Sean los sistemas de coordenadas “1” y “2” en los cuales se plantea la determinación del trabajo

$$[\delta L_\varepsilon/dv]_1 = [\{\Gamma\}^t . \{\delta\psi\}]_1 = [\delta L_\varepsilon/dv]_2 = [\{\Gamma\}^t . \{\delta\psi\}]_2$$

Reemplazando el vector . $\{\delta\psi\}$ en función de las tensiones se puede expresar considerando que la matriz $[F]$ por hipótesis de isotropía debe ser igual en ambos sistemas se obtiene:

$$[\{\Gamma\}^t . [F]\ \{\delta\Gamma\}]_1 = [\{\Gamma\}^t . [F]\ \{\delta\Gamma\}]_2$$

Si se considera que el pasaje de un sistema a otro se puede lograr mediante una matriz de transformación de coordenadas $[A_{12}]$ se obtiene

$$\{\Gamma\}_1 = [A_{12}]\ \{\Gamma\}_2$$

Reemplazando

$$[\{\Gamma\}^t . [F] . \{\delta\Gamma\}]_1 = [\{\Gamma\}^t . [A_{12}]^t . [F] . [A_{12}] . \{\delta\Gamma\}]_1$$

Lo cual permite concluir que la identidad siguiente se debe verificar para cualquier ángulo que se pretende rotar el sistema de coordenadas “2” con respecto al sistema “1”

$$[F] = [A_{12}]^t . [F] . [A_{12}]$$

Si se plantea la transformación, por simplicidad en la deducción, en un estado plano de tensiones se tendrá que la matriz $[A_{12}]$ será:

$$\begin{vmatrix} 0.5 . \cos^2\alpha & 0.5 . \mathrm{sen}^2\alpha & 2 . \mathrm{sen}\alpha . \cos\alpha \\ -0.5 . \mathrm{sen}^2\alpha & 0.5 . \cos^2\alpha & 2 . \mathrm{sen}\alpha . \cos\alpha \\ -0.5 . \mathrm{sen}2\alpha & 0.5 . \mathrm{sen}2\alpha & \cos 2\alpha \end{vmatrix}$$

Operando se llega a determinar la siguiente relación que permite verificar la identidad expuesta más arriba.

$$f_{11} = f_{12} + f_{44} / 2 \qquad [3]$$

De esta relación se deduce que la matriz $[F]$ en un sistema con Linealidad Mecánica, conservativo, homogéneo e isótropo es expresable en base a dos parámetros independientes.

Esta conclusión es sumamente importante, desde un punto de vista práctico, pues con sólo dos parámetros es posible identificar el comportamiento mecánico de un material. Si la determinación de los mismos fuese relativamente sencilla se habría encontrado un procedimiento para obtener la información de la realidad que el modelo requiere con mínimo esfuerzo.

Seguidamente se definirán los parámetros que normalmente se utilizan y la vinculación existente entre ellos.

4.- Parámetros a utilizar

El elemento $\mathbf{f_{11}}$ de la matriz $[\mathbf{F}]$ es el que vincula la deformación específica longitudinal con la tensión normal, cuando sólo existe un estado simple de tensiones.

En este caso se puede expresar directamente, tomando la coordenada **x** en forma genérica:

$$\varepsilon_x = \mathbf{f_{11}} \; \sigma_x$$

Se define a la inversa del elemento $\mathbf{f_{11}}$ como el ***módulo de elasticidad longitudinal*** o ***módulo de Young*** y normalmente se lo identifica con la letra "**E**"

$$\mathbf{f_{11}} = 1 / \mathbf{E}$$

De la observación de la matriz $[\mathbf{F}]$ se puede apreciar que en un estado simple como el analizado donde sólo existe una tensión normal -la asociada al eje **x** en este caso- el elemento $\mathbf{f_{12}}$ está representando la deformación longitudinal específica en un eje perpendicular al que actúa la tensión. Esta deformación es igual en dos direcciones pues este elemento tiene el mismo valor que $\mathbf{f_{13}}$. Por lo tanto si en dos direcciones se produce una misma deformación longitudinal específica la misma se registrará en todas las direcciones contenidas en el plano definidos por aquellas.

Se define como ***módulo de Poisson***, y se lo identifica con la letra griega μ a la relación existente entre las deformaciones longitudinales registradas en un plano transversal a la dirección de una deformación longitudinal y ésta última.

$$\mu = -\varepsilon_{lt} / \varepsilon_l$$

En base a esta definición se obtiene:

$$\mathbf{f_{12}} = -\mu / \mathbf{E}$$

El signo negativo es debido a que la deformación transversal tiene signo opuesto a la deformación longitudinal.

$\mathbf{f_{44}}$ define la relación entre las tensiones tangenciales y la distorsión angular específica, se define a su inversa como ***módulo de elasticidad transversal*** **G**

$$\mathbf{f_{44}} = 1 / \mathbf{G}$$

De la expresión [3], que demuestra que sólo dos parámetros son independientes se deduce la siguiente relación:

$$\mathbf{G} = \mathbf{E} \,/\, 2 \,.\, (1+\mu)$$

En base a lo expuesto la matriz constitutiva [**F**] puede expresarse como la siguiente matriz multiplicada por 1/**E**:

$$\begin{matrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.(1+\mu) \end{matrix}$$

La matriz [**R**] puede determinarse mediante la inversión de la matriz [**F**] mediante lo cual se obtiene:

$$[\mathbf{R}] = \begin{matrix} \mathbf{E}/(1-\mu-2\mu^2) & \begin{matrix} 1-\mu & \mu & \mu \\ \mu & 1-\mu & \mu \\ \mu & \mu & 1-\mu \end{matrix} & & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \mathbf{G} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \end{matrix}$$

Resta describir como se podrían obtener por vía experimental, para aquellos materiales que se ajustan a las hipótesis formuladas, los parámetros que definen la matriz constitutiva.

Las relaciones en las que intervienen estos parámetros vinculan magnitudes asociadas a elementos diferenciales los cuales escapan a la observación propia de los ensayos que se realizan en la materia por lo tanto se requiere formular algunas hipótesis adicionales que posibiliten su obtención mediante el ensayo de estructuras simples. Se volverá oportunamente sobre este tema.

5.- Límites del módulo de Poisson

Para determinar los límites del módulo de Poisson se considera un elemento de volumen infinitésimo sobre el cual actúa un estado de tensión hidrostático:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$$

La deformación volumétrica correspondiente a ese estado será, aplicando la relación entre tensiones y deformaciones:

$$\varepsilon_x = 1/E\ (\sigma_x - \mu\ (\sigma_y + \sigma_z))$$
$$\varepsilon_y = 1/E\ (\sigma_y - \mu\ (\sigma_x + \sigma_z))$$
$$\varepsilon_z = 1/E\ (\sigma_z - \mu\ (\sigma_x + \sigma_y))$$

$$\varepsilon_v = 1/E\ (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \,.\, (1 - 2\mu)$$

Para el estado de tensiones planteado la deformación volumétrica debe tener el mismo signo que la tensión de lo cual se deduce que

$$(1 - 2\mu) > 0$$

o lo que es lo mismo $\mu < 0.5$ Por otra parte la relación entre la deformación transversal y la longitudinal debe ser siempre mayor o igual a 0 con lo cual los límites de variación del módulo de Poisson serán:

$$0 \leq \mu \leq 0.5$$