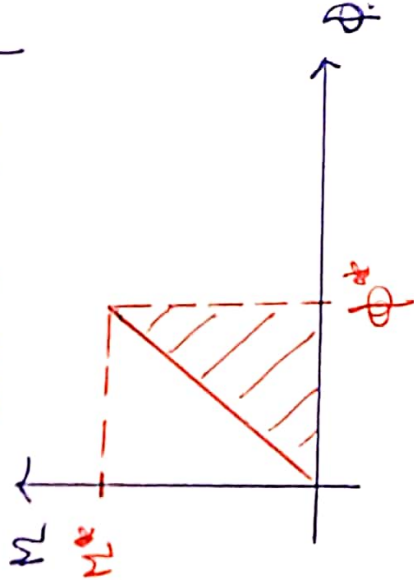


1/10

ÁNGULO DE TORSIÓN:

$$dW = M \cdot d\phi$$



$$W = \int dW = \int M \, d\phi$$

$$M = k \cdot \phi \rightarrow \text{si } \phi = \phi^* \rightarrow M = M^*$$

$$\phi = \frac{M}{k}$$

$$W = \int M \, d\phi = \int k \phi \, d\phi = \frac{1}{2} k \phi^2$$

$$W = \frac{1}{2} k \frac{M^2}{k^2} = \frac{1}{2} \frac{M^2}{k} \rightarrow \underline{W^* = \frac{1}{2} \frac{M^* \phi^*}{k}}$$

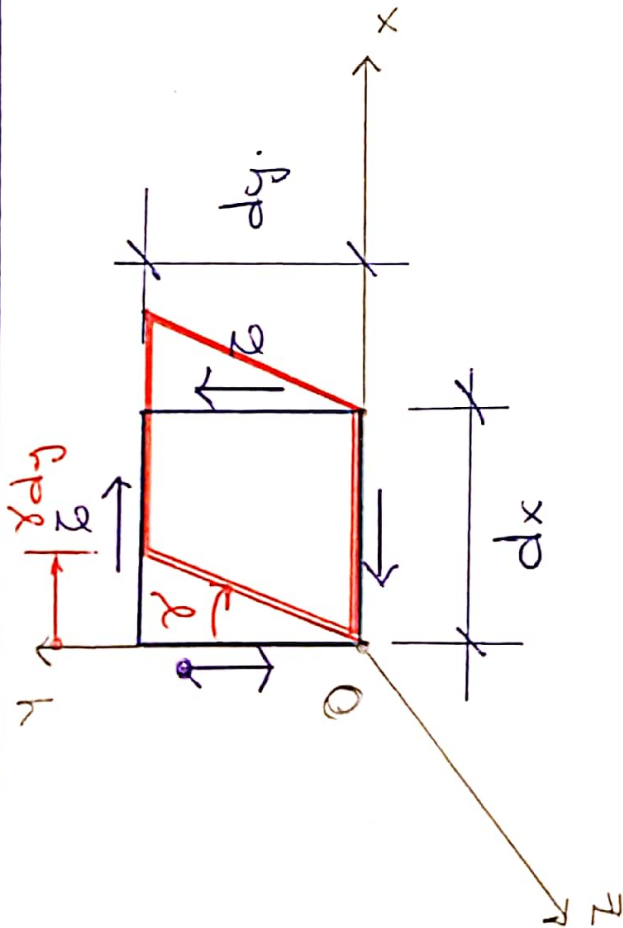
TRABAJO DE LAS FIBRAS EXTERNAS

$$W = \frac{1}{2} k \frac{M^2}{k^2} = \frac{1}{2} \frac{M^2}{k}$$

$$\underline{W^* = \frac{1}{2} \frac{M^* \phi^*}{k}}$$

2/10

ENERGÍA INTERNA DE DEFORMACIÓN



$$dU_i = \frac{1}{2} \tau \gamma \cdot \frac{dx \cdot dz}{dV}$$

$$U_i = \int_V dU_i = \int_V \frac{1}{2} \tau \gamma dV$$

$$\tau = G \gamma \quad \gamma = \frac{\tau}{G}$$

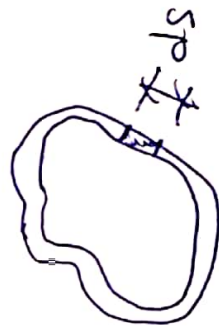
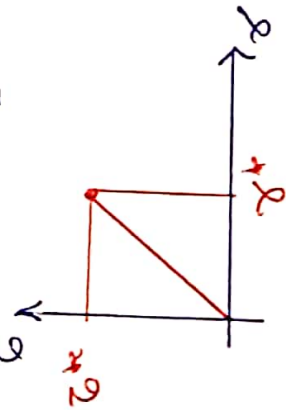
$$U_i = \int_V \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} dV$$

$$dF = \tau \cdot dx \cdot dz$$

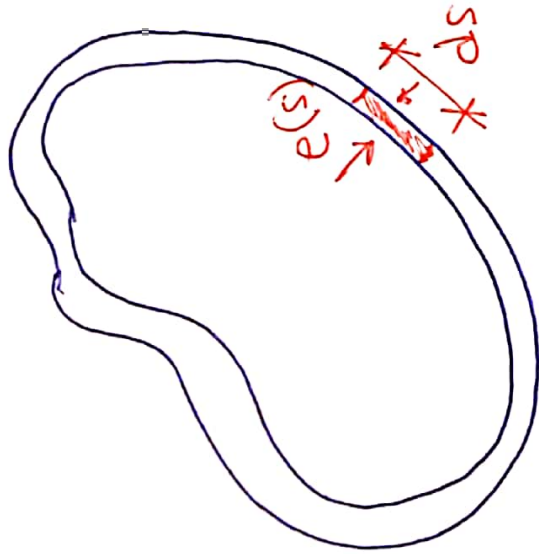
$$W = U$$

Relación lineal entre tensiones y deformaciones. $\frac{1}{2} U \phi = \int_V \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} dV$

$$dU_i = \frac{1}{2} [\tau dx dz] \gamma dy \quad dV = \frac{1}{2} \cdot e(s) \cdot ds$$



$$\tau = \frac{M r}{2 S e} \rightarrow \tau^2 = \frac{M^2 r^2}{4 S^2 e^2}$$



$$\frac{1}{2} \mu_T \phi = \int_s \frac{1}{2} \frac{\mu_T^2}{4\Omega^2 e^2} \frac{1}{\Omega} ds$$

$$\frac{1}{2} \mu_T \phi = \frac{1}{2} \frac{\mu_T^2}{4\Omega^2 G} \int \frac{ds}{e(s)}$$

$$\phi(x) = \frac{\mu_T(x)}{4\Omega^2 G} \int_s \frac{ds}{e(s)}$$

1ª Aproximación:

$$\frac{\Delta s_i}{e} + \frac{\Delta s_i}{e}$$

$$\phi(x) = \frac{\mu_T(x)}{4\Omega^2 G} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta s_i}{e_{mi}}$$

2ª Aproximación: $\Delta s_i = cte$

$$\phi(x) = \frac{\mu_T(x)}{4\Omega^2 G} \cdot \Delta s \sum_{i=1}^n \frac{1}{e_{mi}}$$

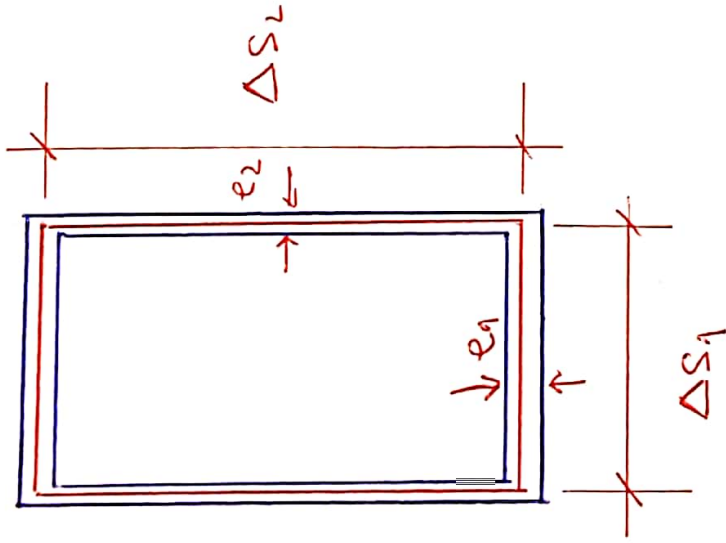
3ª Aproximación: $e_{mi} = cte$

$$\phi(x) = \frac{\mu_T(x)}{4\Omega^2 G} \cdot \frac{s}{e}$$

S: Longitud de la ~~línea~~ ~~línea~~

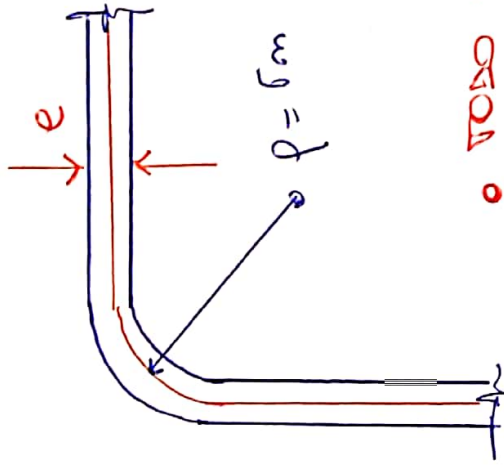
LÍNEA MEDIA.

4/10



$$\frac{\Delta S_1}{e_1} + \frac{\Delta S_2}{e_2} + \frac{\Delta S_1}{e_1} + \frac{\Delta S_2}{e_2}$$

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\Delta S_i}{e_i}$$

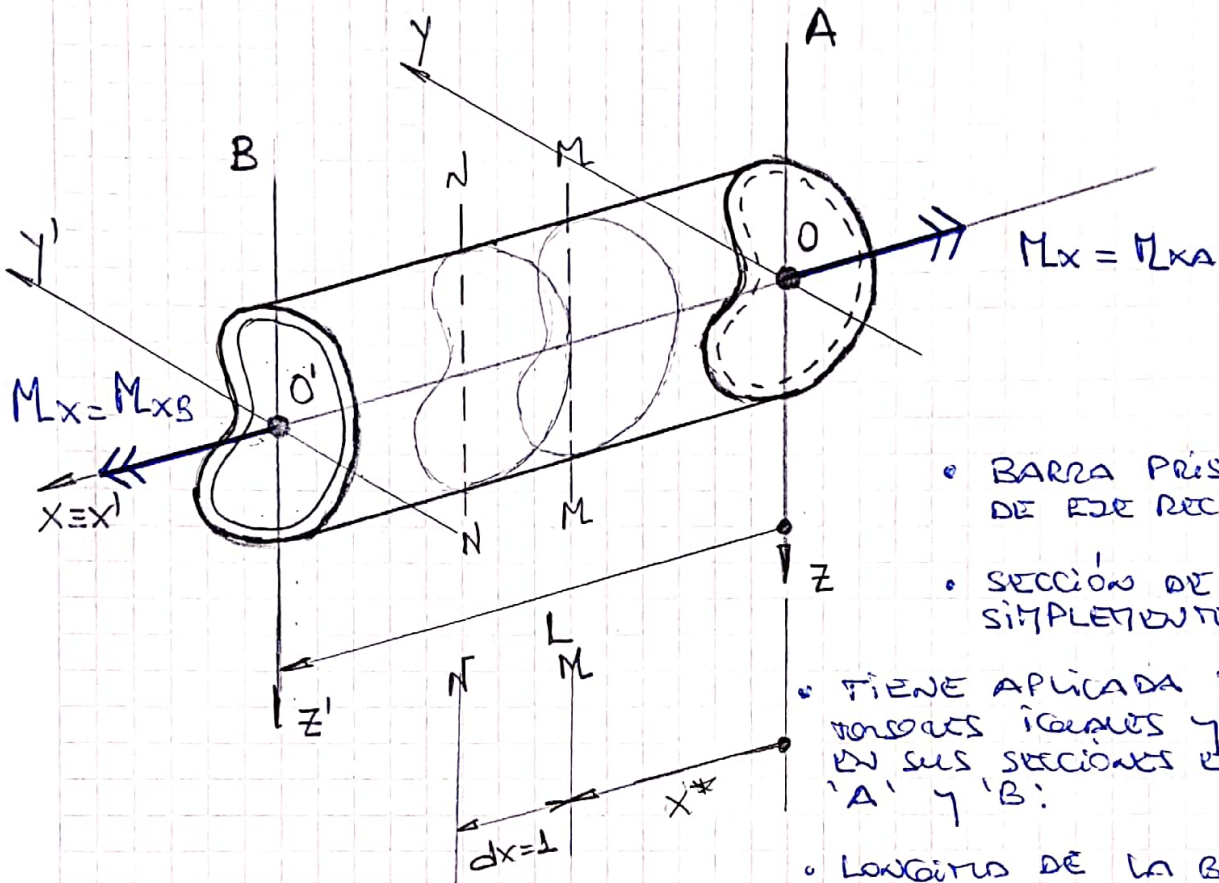


• TODO EL DESARROLLO ES
VÁLIDO SI :

$$p > e$$

NO

• SI $p \approx e \rightarrow$ ES VÁLIDO.



- BARRA PRISMÁTICA DE EJE RECTO HUELTO
- SECCIÓN DE $A = \text{cte}$ SIMPLEMENTE CONEXA

• TIENE APLICADA 2 momentos iguales y opuestos en sus secciones extremas 'A' y 'B'.

• LONGITUD DE LA BARRA 'L'

- LA BARRA ESTÁ EN EQUILIBRIO POR LAS FUERZAS EXTERNAS M_{xA} y M_{xB} , TAL QUE CUMPLE

$$M_{xA} + M_{xB} = 0.$$

- SE CONSIDERA UNA RESANA ELEMENTAL ~~ELONGITUDINAL~~ (SEPARADA) DE LONGITUD $dx = 1$.
- LAS SECCIONES EXTERNAS SE DENOTAN:

sección 'M': $\text{en } x = x^* = x_M$

sección 'N': $\text{en } x = x^* + dx = x_N.$

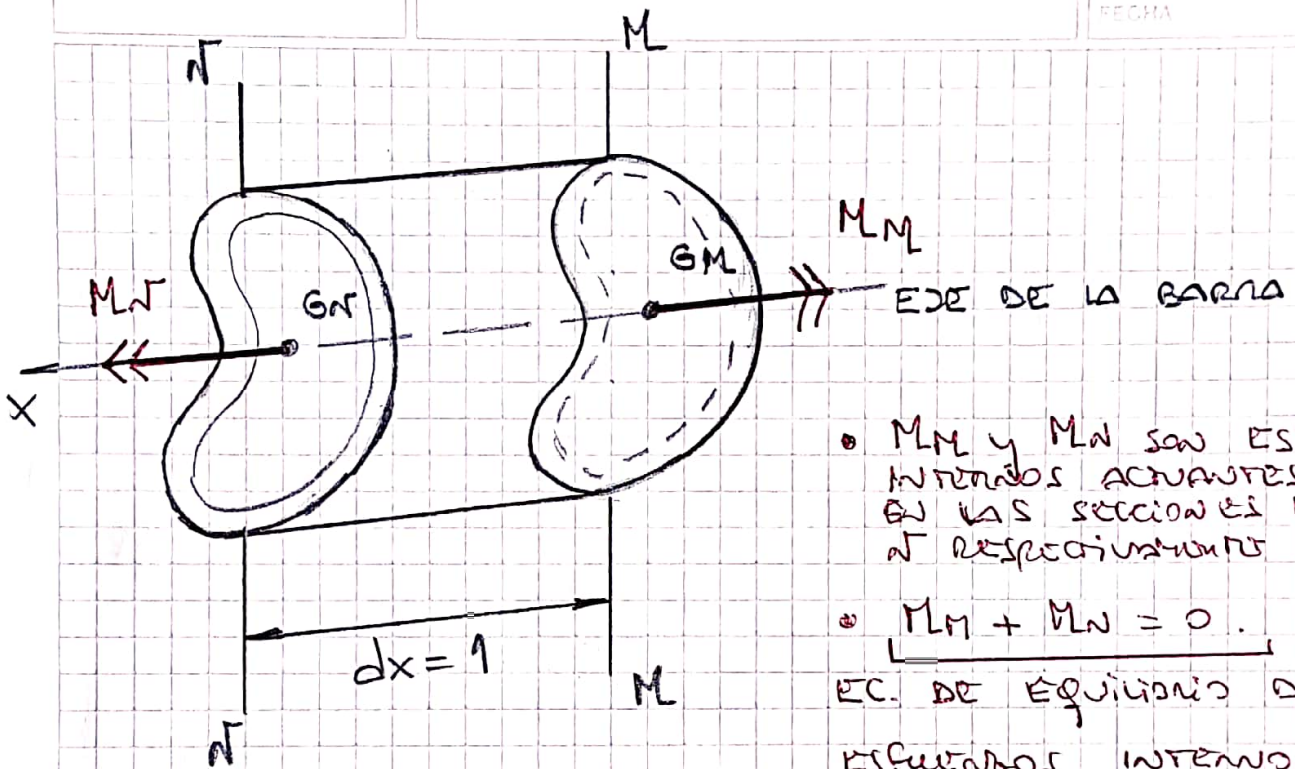
Luego:

$$x_N = x_M + dx = x_M + 1.$$

Por ser:

$$dx = 1.$$

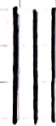
→ EL EQUILIBRIO QUEDA SATISFECHO ENTRE FUERZAS EXTERNAS.



- M_M y M_N son esfuerzos internos actuantes en las secciones M y N respectivamente

$$M_M + M_N = 0$$

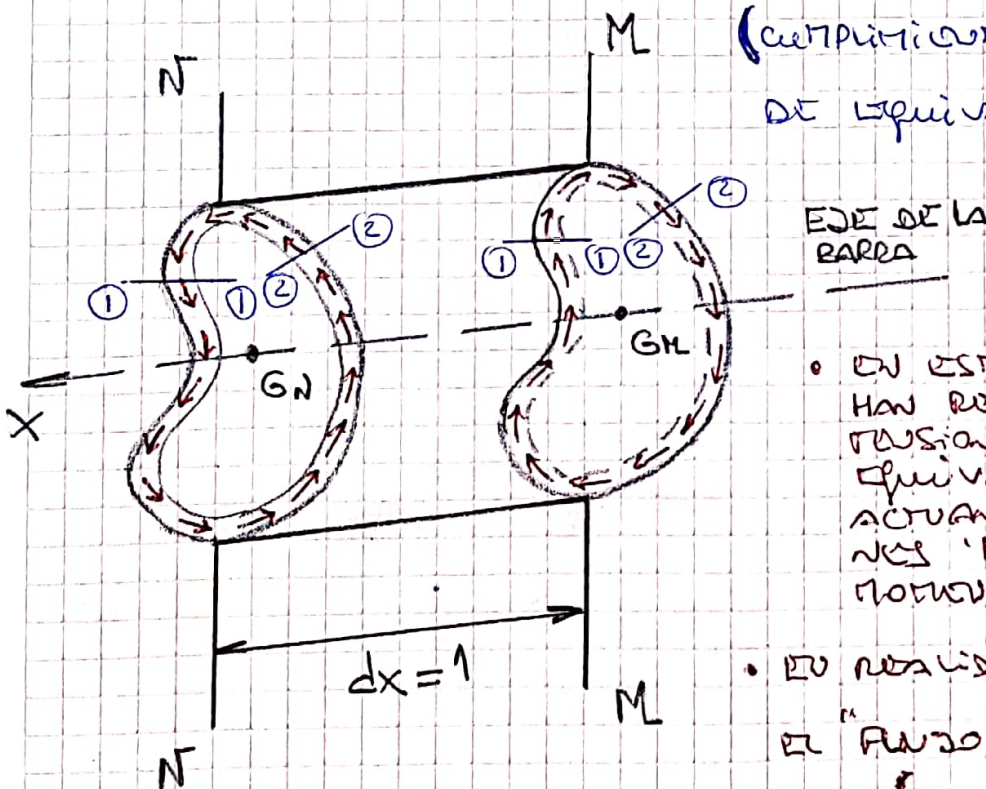
EC. DE EQUILIBRIO DE ESFUERZOS INTERNOS.



ESQUETAS EQUIVALENTES ENTRE

SOLICITACIONES INTERNAS Y TENSIONES

(multiplicando de las EES DE EQUIVALENCIA $\rightarrow$ 4ª EC)



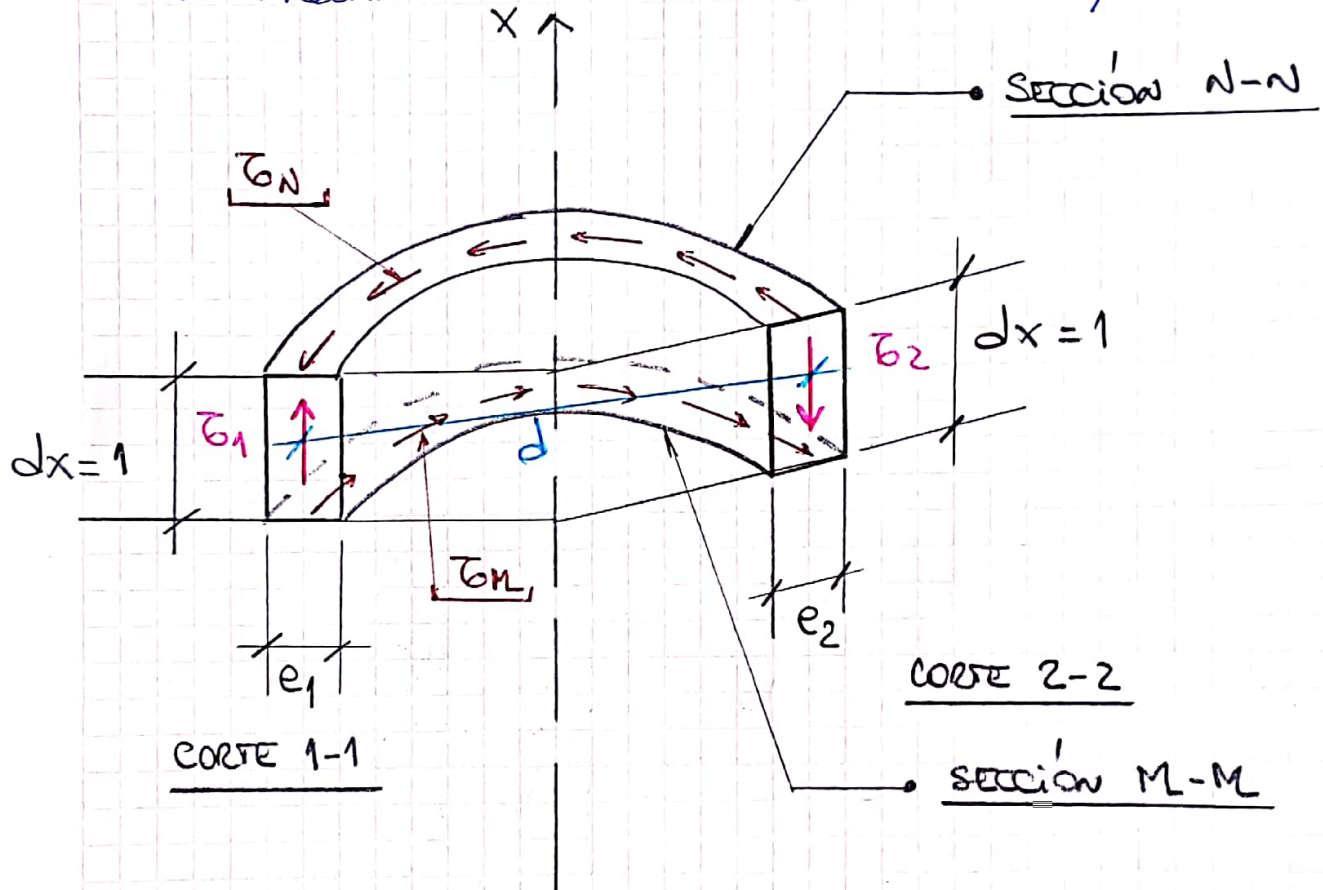
- EN ESTE ESQUETA SE HAN REPRESENTADO LAS TENSIONES TANGENCIALES EQUIVALENTES A LOS ACTUANTES EN LAS SECCIONES 'M' y 'N' A LOS MOMENTOS M_M y M_N .

- EN REALIDAD SE REPRESENTARÍA EL "FUERZO DE TENSIONES"

$$q = \frac{1}{b} \cdot e \cdot \frac{dM}{dx}$$

donde b es el ancho de la barra y e es el espesor de la barra.

- Practicando 2 cortes en las secciones 'M-M' y 'N-N' en los puntos '1-1' y '2-2', y rotando la figura para mejor visualización, queda:



2º y 3º LCS de ~~equivalencia~~ equilibrio:

$$\underbrace{0}_{Q_{yz}} = \underbrace{\int_s T_N(s) \cdot e_N(s) \cdot ds}_{\text{RESULTANTE DE LAS } T \text{ EN EL PLANO } yz \text{ DEL PLANO N}} - \underbrace{\int_s T_M(s) \cdot e_M(s) \cdot ds}_{\text{IDEM PARA EL PLANO M.}}$$

F_{yz}^N
 F_{yz}^M

• SE SATISFACE.

$$F_{yz}^N - F_{yz}^M = 0.$$

1º EC. DE EQUILIBRIO:

$$\Sigma F_x = 0$$

FUERZAS INTERNAS

$$\underbrace{N_N}_{=0} + \underbrace{N_M}_{=0} = 0$$

$$\bar{c}_1 \cdot e_1 \cdot 1 - \bar{c}_2 \cdot e_2 \cdot 1 = V_1 - V_2 = 0.$$

• SE SATISFACE.

4º EC. DE EQUILIBRIO:

- SE TOMA MOMENTOS RESPECTO DE CUALQUIER PUNTO DEL PLANO DE LA SECCIÓN 'N' DE LAS $\bar{c}_N$.
- IDEM PERO RESPECTO DEL PLANO DE LA SECCIÓN 'M' DE LAS $\bar{c}_M$, DE TAL MANERA QUE AMBOS PUNTOS ESTÁN ALINEADOS EN UNA RECTA PARALELA AL EJE DE LA BARRA.

$$M_{LX}^N - M_{LX}^M = 0 = \int_S \bar{c}_N(s) \cdot e_N(s) \cdot r \cdot ds - \int_S \bar{c}_M(s) \cdot e_M(s) \cdot r \cdot ds$$

• SE SATISFACE.

S° y G° EC. DE EQUILIBRIO: → Veron momento causado en el punto 'yz':

$$M_{yz} = 0 = \underbrace{\int_s \tau_{w1} \cdot e_{w1}(s) \cdot 1 \cdot ds}_{F_{yz}^N \cdot 1} - \underbrace{\tau_{q1} \cdot e_{q1} \cdot 1 \cdot d}_{V_{q1} \cdot d}$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{\int_s \tau_{w2} \cdot e_{w2}(s) \cdot 1 \cdot ds}_{F_{yz}^M \cdot 1} - \underbrace{\tau_{q2} \cdot e_{q2} \cdot 1 \cdot d}_{V_{q2} \cdot d}$$

→ RESUMEN:

• SE HAN PLANTEADO 4 TIPOS DE EQUILIBRIO:

↳ I) Equilibrio de FAS EXTERIORES PARA LA TOTALIDAD DE LA ESTRUCTURA, con M_x^A y M_x^B ;

↳ II) Equilibrio de FAS INTERNAS PARA LA LONGITUD 'dx' con M_M y M_N ;

↳ III) Equilibrio de las FUERZAS EQUIVALENTES DE LOS MOMENTOS M_M y M_N ORIGINALES POR LAS RESISTENCIAS $\tau_{w1}(s)$ y $\tau_{w2}(s)$;

↳ IV) Equilibrio de las FUERZAS EQUIVALENTES POR LOS CORROS $M-N-1$ y 2 .

TORSIÓN EN BARRAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL NO CIRCULAR

01 – INTORDUCCIÓN:

La determinación de las variables, tensiones y desplazamientos y deformaciones, en este tipo de barras con secciones no circulares es un problema “bastante” más complejo que los vistos hasta ahora;

No puede ser estudiado en la forma y metodología que hemos venido estudiando: SA. SF y ST en secciones circulares;

Repasando esta metodología, la misma era la siguiente:

- I. Se realizaba un ensayo del elemento y de la sollicitación a ser estudiado;
- II. Se observaba cómo era la deformación y se sacaban conclusiones de la misma, las cuales se transformaban en Hipótesis de Trabajo;
- III. De las conclusiones se observaban cómo era la variabilidad de las deformaciones;
- IV. Luego, mediante la Ley de Hooke, se relacionaban con las tensiones;
- V. Se utilizaban las Ecs de Equivalencia para poder establecer las relaciones entre Tensiones y Esfuerzos Internos.

Estos problemas son abordados por la “Teoría Matemática de la Elasticidad” y por Teorías “Ad-Hoc”.

Estas teorías escapan o se encuentran fuera del alcance de nuestra asignatura. Por lo tanto, no serán estudiadas.

Solamente se verán las conclusiones de dichos estudios y algunos aspectos considerados como “importantes” e “imprescindibles” para el entendimiento del comportamiento.

Acá, de un ensayo se observa que:

- i.- Las secciones NO se mantienen planas después de la deformación por torsión, por lo tanto, se alabea;
- ii.- Las secciones NO mantienen su forma;

TEORÍA DE SAINT-VENANT:

- SECCIONES NO CIRCULARES.
- BASTANTE MÁS COMPLEJO.

- $\left\{ \begin{array}{l} SA \\ SF \\ ST \end{array} \right\}$ (CONCEPTOS, BREVES).

$$SA \rightarrow \sigma_x(x) = \frac{\sigma(x)}{A(x)}$$

$$SF \rightarrow \sigma_x(x) = \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z.$$

$$ST \rightarrow \tau_{xy}(x,y) = \frac{M_y(x)}{I_p} \cdot r$$

RESOLUCIÓN:

→ I) TEORÍA MATEMÁTICA DE LA ELASTICIDAD.

→ II) TEORÍAS "AD HOC"

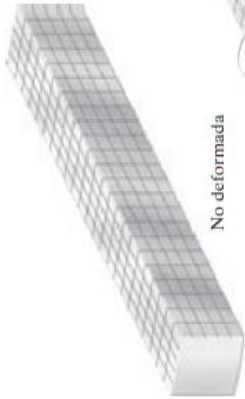
DE UN PUNTO DE VISTA:

I) LAS SECCIONES NO SE MANTIENEN PLANAS → SE ALABEZAN.

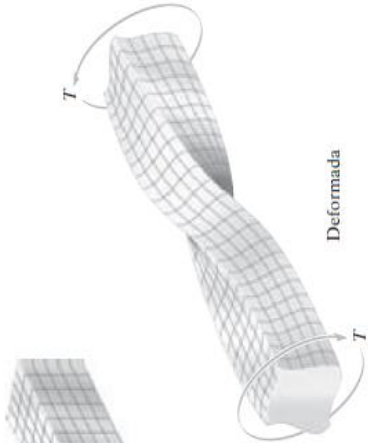
II) LAS SECCIONES NO MANTIENEN SU FORMA.

02 – CONSIDERACIONES – PARTICULARIDADES – OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES DE LOS ESTUDIOS:

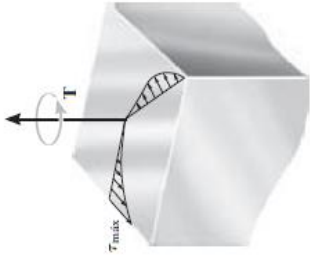
- I.- Deberá estudiarse y cuantificarse no sólo los giros relativos entre las secciones, sino también, las distorsiones locales para cada sección. Precisamente, las distorsiones locales caracterizan el alabeo. De esta última consideración se desprende que también deberá estudiarse el alabeo relativo entre las secciones;
- II.- En barras de secciones cuadradas, las secciones que giran 90° ó 180° suelen mantener su forma;
- III.- En consonancia con la precisión anterior, se observa que para el resto de las secciones, se podrá presentar que algunas líneas se mantengan rectas después de la deformación por torsión;
- IV.- Para el resto de las líneas que pueden trazarse en cualquier sección, las mismas se terminan curvando cuando la barra se deforma;
- V.- Las distorsiones no tienen una relación lineal entre ellas, y por consiguiente, si es aplicable la “Ley de Hooke”, lo que es lo mismo que decir que el material se encuentra trabajando dentro del período elástico, las tensiones tampoco poseen una relación lineal entre ellas;
- VI.- Para una sección transversal de una barra cuadrada o rectangular, es un error considerar que las tensiones tangenciales variarán en forma lineal con su distancia al eje de la misma;
- VII.- Las tensiones tangenciales no van a depender de un solo parámetro (r : radio, por ejemplo); sino que van a depender de las 2 coordenadas de un punto de la sección (y_P ; z_P);
- VIII.- Las tensiones en el contorno de una sección cualquiera van a tener la dirección de la tangente a la misma;
- IX.- En las secciones transversales cuadradas o rectangulares, en los vértices de las mismas las tensiones tangenciales son nulas.



No deformada



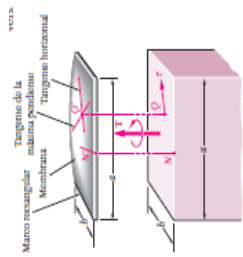
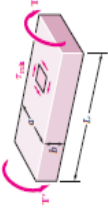
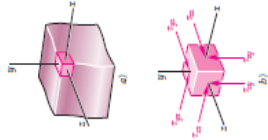
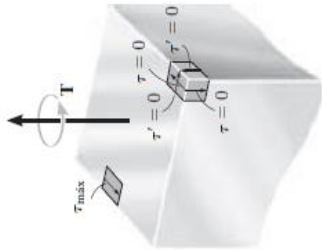
Deformada



Distribución del esfuerzo cortante a lo largo de dos líneas radiales



Alabeo del área de la sección transversal

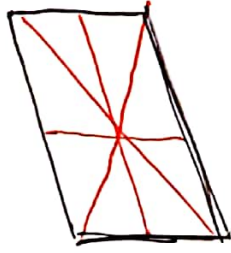


6/10

ALGUNAS PARTICULARIDADES:

I) SE DEBEÑAN ESTUDIAR: GIROS RELATIVOS Y DISTORSIONES LOCALES.

II) SE PRESENTAN LÍNEAS QUE SE MANTIENEN RECTAS.



III) EL RESO DE LAS LÍNEAS SE TERMINA CUANDO LA BARRA SE DEFORMA.

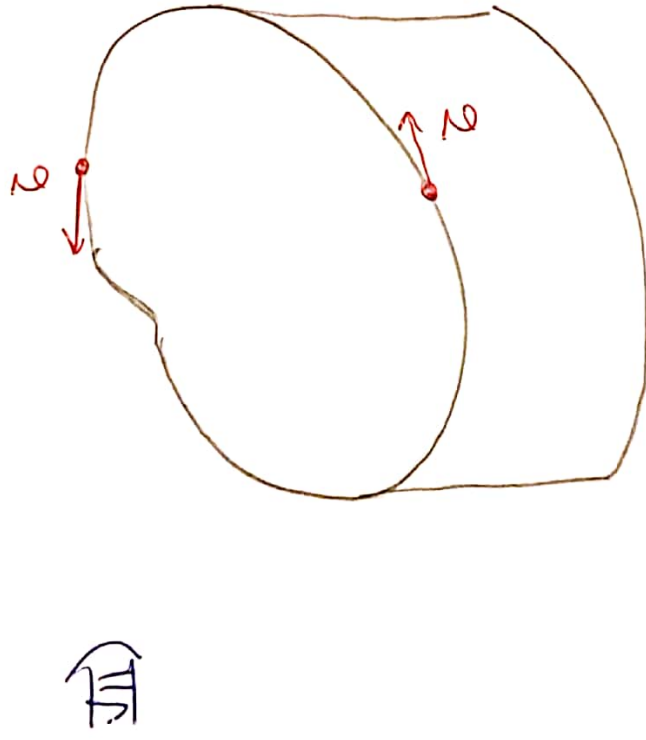
IV) LAS DISTORSIONES NO TIENEN UNA RELACIÓN LINEAL

NO SE
CUMPLE

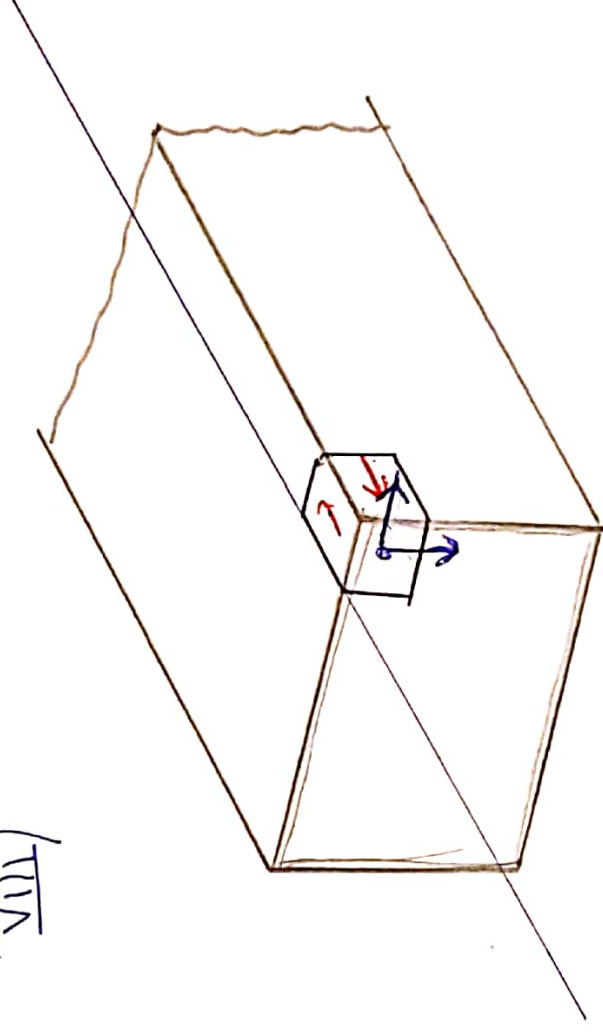
$$\gamma = \gamma_{\max} \cdot \frac{r}{R} \rightarrow \tau = \tau_{\max} \cdot \frac{r}{R}$$

II) LAS ' $\vec{e}_i$ ' tampoco varían bivalentemente.

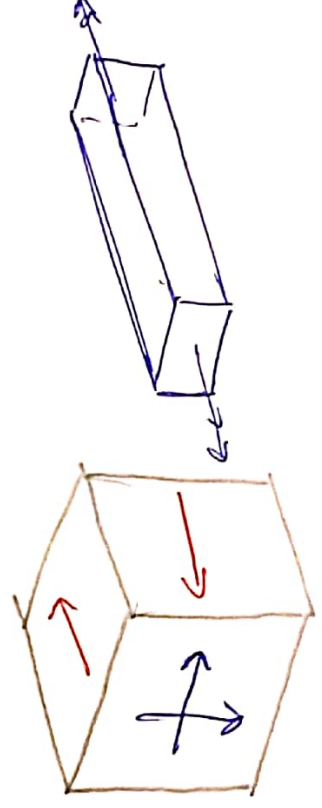
III) LAS ' $\vec{e}_i$ ' no dependen de una sola variable de posición $\rightarrow$ por lo menos de '2'.



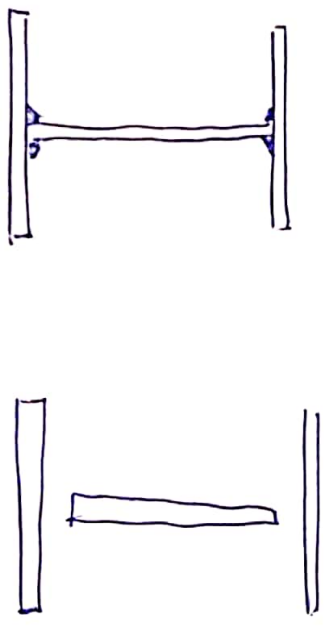
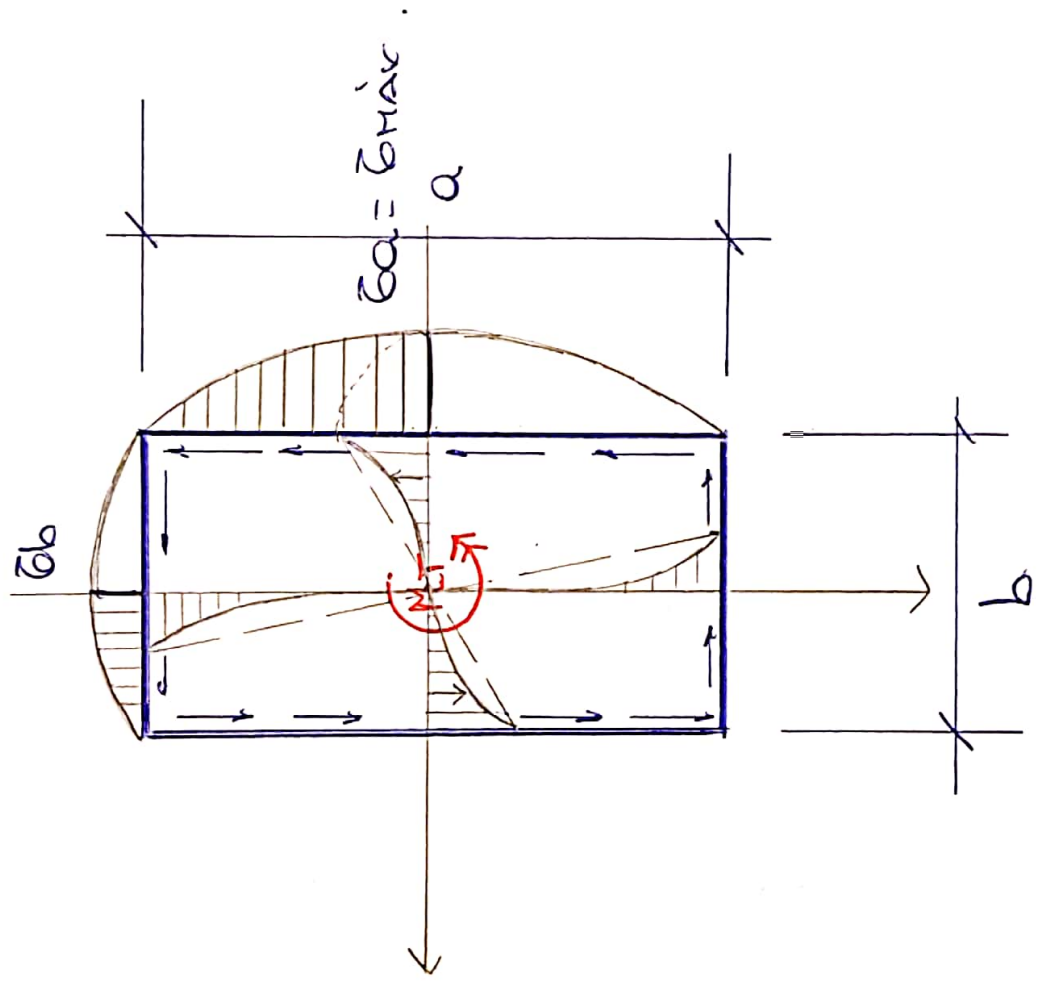
VIII)



$\vec{e}$ tang. al contorno.



SECCION RECTANGULAR:



$$\sigma_a = \sigma_{max} = \frac{M_T(x)}{\alpha \cdot a \cdot b^2}$$

$$\alpha = f(a/b)$$

$$\sigma_b = \eta \cdot \sigma_{max} = \eta \cdot \sigma_a$$

$$\eta = f(a/b)$$

$$\phi(x) = \frac{M_T(x)}{E \cdot \beta \cdot a \cdot b^3}$$

$$\beta = f(a/b)$$

Tabla 2

a/b	1	1.5	1.75	2	2.5	3	4	6	8	10	∞
α	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333
η	1.000	0.859	0.820	0.795	0.766	0.753	0.745	0.743	0.742	0.742	0.742

9/10

PERFILES ABIEROTOS:

$$\frac{a}{b} \rightarrow \infty \rightarrow \alpha \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$\frac{L_i}{t_i} \geq 10 \rightarrow \alpha_i \approx 0,333 = \frac{1}{3}$$

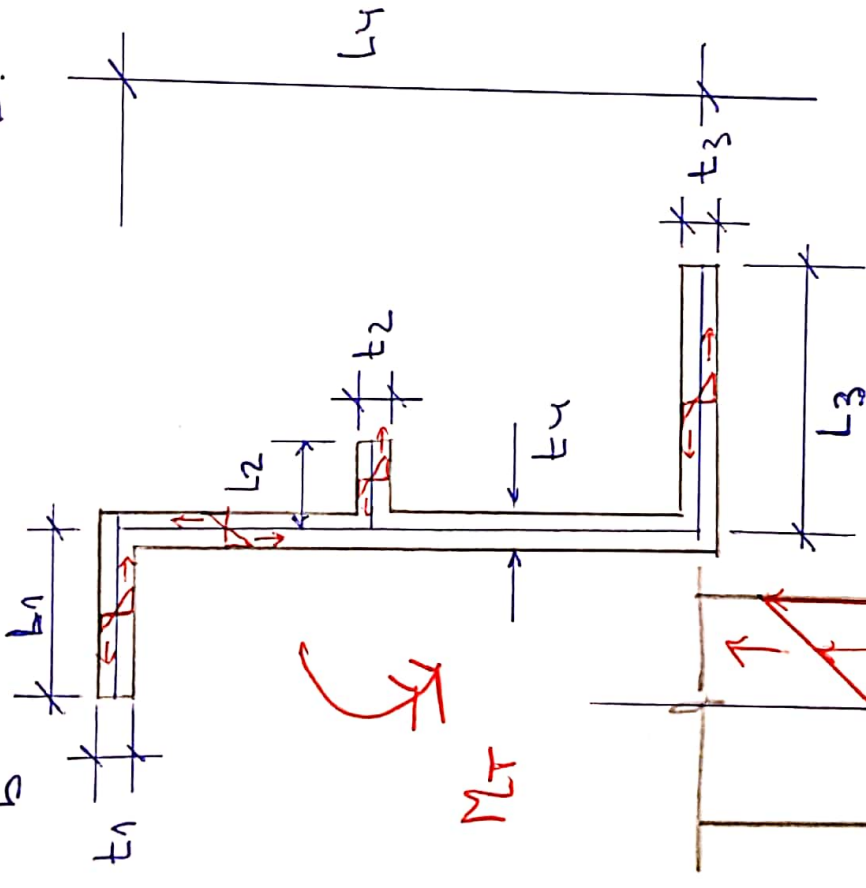
$$\tau_{ci} = \frac{M_T \cdot t_i}{\sum_{i=1}^n \alpha L_i t_i^3} \cdot t_i$$

$$\tau_{ci} = \frac{M_T(x)}{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n L_i t_i^3} \cdot t_i$$

$J_T = I_T$: momento de torsión.

$$\tau_{máx} = \frac{M_T(x)}{I_T} \cdot t_{máx}$$

$$\phi(x) = \frac{M_T(x)}{G I_T} \cdot L$$



10/10

TEORIA

APUNTA

CON LOS

CONCLUSIONES
MUESTRA
7
MAYOR

BEST

TURNUROS DE
E PREGUNTA

Saint Jean

CONSEJOS
RECIBIR
ASIENTOS.

