

SOLICITACIÓN POR TORSIÓN EN REGIÓN ELÁSTICA ST

00) - INTRODUCCIÓN:

I) → VAN A APARECER EN CADA UNO DE LOS PASOS DE UNA

SECCIÓN → "6"
 $\left. \begin{array}{l} SA \\ SF \end{array} \right\} \rightarrow "5"$

II) → COMPONENTE DE $\bar{M}_R \rightarrow$ PERPENDICULAR AL PLANO DE LA SECCIÓN.

SA

2/11

01) → OBJETIVO:

• ESTUDIAR Y ANALIZAR:

↳ PRINCIPIOS Y FUNDAMENTOS DEL FUNC. ESTRUCTURAL DE ELEMENTOS SOLICITADOS A $[ST]$.

↳ CONOCEROS MATEMÁTICOS, FÍSICOS Y MECANICOS DE ELEM. SOLICITADOS A $[ST]$

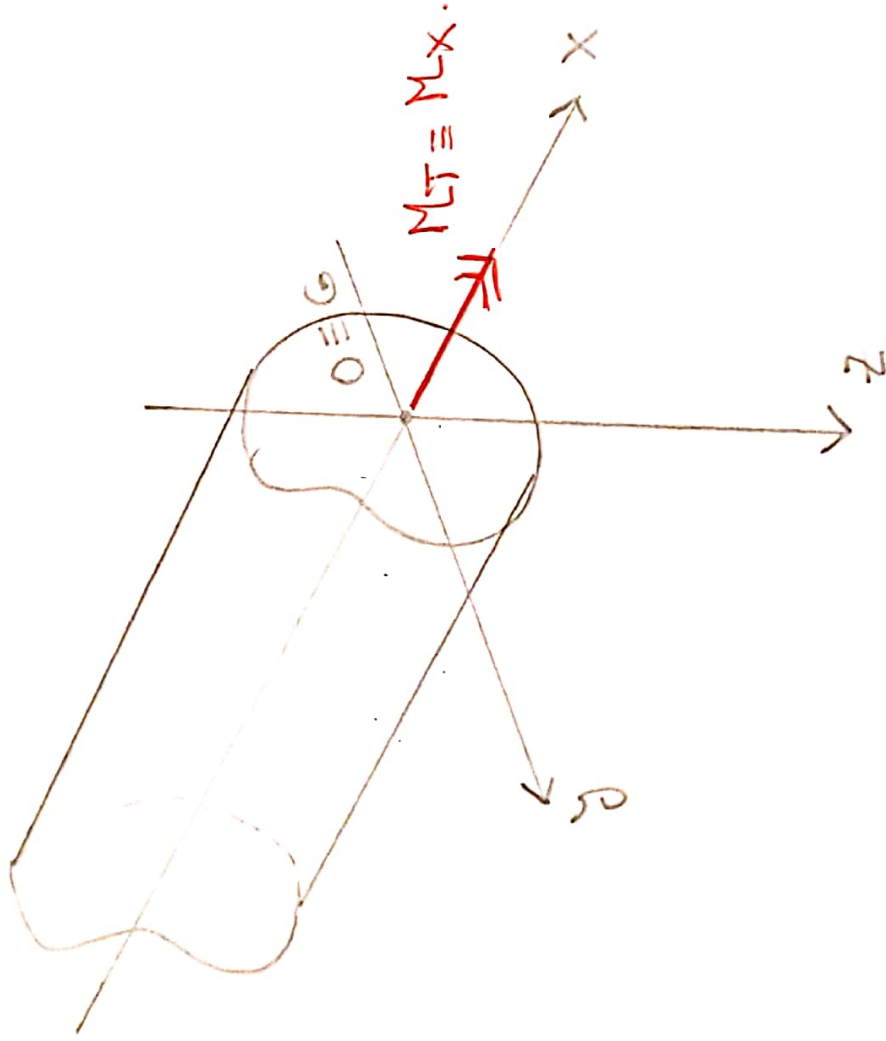
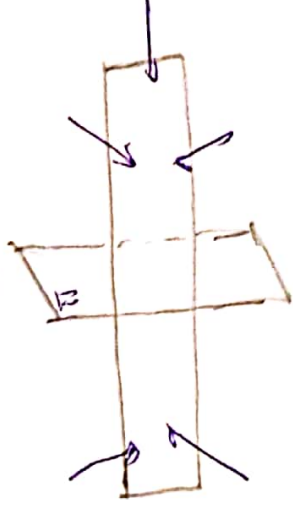
↳ VERIFICAR Y DISEÑAR ELEM. ESTRUCT. A $[ST]$

• ~~ESTUDIOS~~ ESTUDIOS PRELIMINARES DEL DISEÑO Y DEL PROYECTO.

02) - Definiciones:

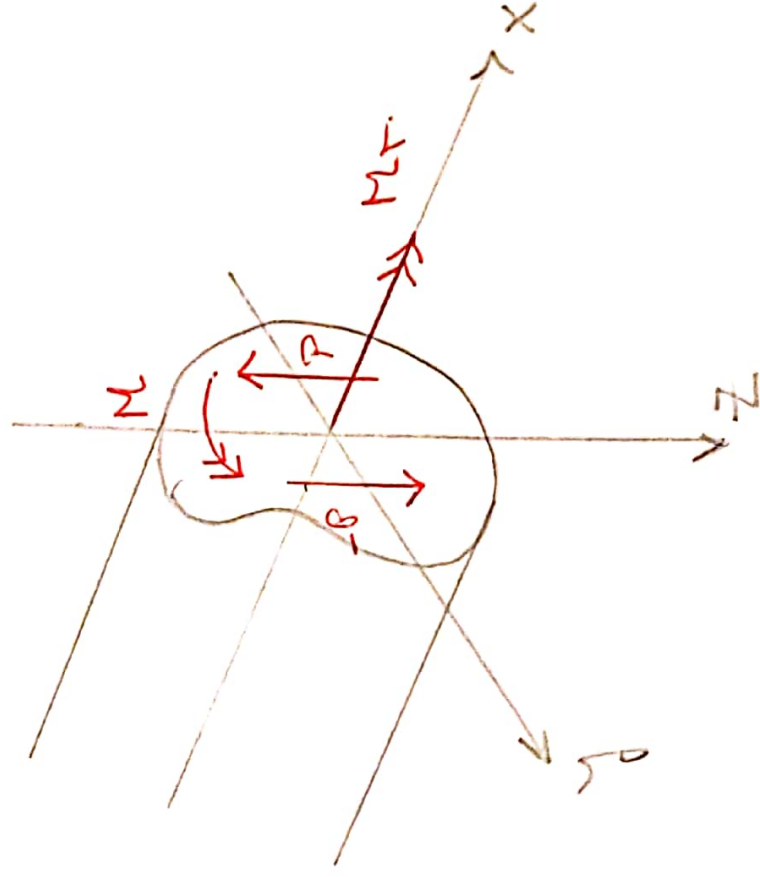
3/11

$$F_E = F_A + F_B$$



'x' → eje de la barra

'y', 'z' → EPIG



4/11

TORSIÓN SIMPLE:

TODAS LAS SECCIONES ESTÁN SUJETAS EXCLUSIVAMENTE A TORSIÓN DE UN ELEM. ESTRUCT.

$$M_T(x) \neq \text{cte.}$$

TORSIÓN PURA: $M_T(x) = \text{cte}$

CONSIDERACIONES:

→ TODAS LAS DEFINICIONES SON VÁLIDAS SIEMPRE CUANDO: $G \equiv C_C$ (CENTRO DE CORTE).

→ SI $G \neq C_C$ → LAS FIBRAS P/ LA TORSIÓN HAZEN QUE PERMANEZCAN AL C_C → "MOMENTO TORSOR REAL"

→ EN TODO EL DESARROLLO A CONTINUACIÓN:

→ $G \equiv C_C$ O QUE LAS FIBRAS γ_A ESTÁN PERMANECIENDO AL C_C

5/11

03) - CLASIFICACION:

→ EL TRANSMISOR DE ST → ES BASTANTE COMPLEJO.

→ **Por qué?** → LAS SECCIONES NO SE MANTIENEN PLANAS →
SE DEFORMAN POR FUERA DE SU PLANO → ALABEO.

I) → TORSION UNIFORME - TU:
• EL ALABEO RELATIVO ENTRE LAS SECCIONES ES DESPRECIABLE.

ST

II) → TORSION NO UNIFORME - TNU.
• EL ALABEO RELATIVO NO ES DESPRECIABLE.



6/11

I - Torsión Uniforme - TU

• EL ALARGO DE LAS SECCIONES NO ESTÁ IMPEDIDO.



• LAS SECCIONES SE PUEDEN ALARGAR PERO EL ALARGO DE TODAS LAS SECCIONES ES APROXIMADAMENTE EL MISMO.

↳ ES EL MISMO P/ TODAS.

↳ ALARGO MEDIANO ES DESPRECIABLE. → NULO.

• SE ESTUDIA BASTO 2 TEORÍAS.

a) TEORÍA DE COULOMB. COULOMB.

b) " " SAINT VENANT.

7/11

a) TEORÍA DE COLUMNAS:

→ SE APLICA SOLAMENTE A SECCIONES CIRCULARES MACIZAS O HUECAS.

→ EL ALARGO ES NULO.

b) TEORÍA DE SAINT VENANT:

- ES UNA MÁS GENERAL.

- EL ALARGO SE PRODUCE PERO ÉSTE ES EL MISMO P/ TODAS LAS SECCIONES.

- APLICA A LAS BARRAS HISTÓRICAS EN GENERAL.

- LAS TENSIONES QUE SE PRODUCEN SOLAMENTE DEBIDAMENTE DEL M.T.

- $$\boxed{E_x \approx 0} \rightarrow \boxed{\sigma_x \approx 0}$$

- SE PUEDEN CONSIDERAR QUE LA T. DE COLUMNAS ES UN CASO PARTICULAR DE SAINT VENANT.

8/11

II - TORSION NO UNIFORME: - TNU:

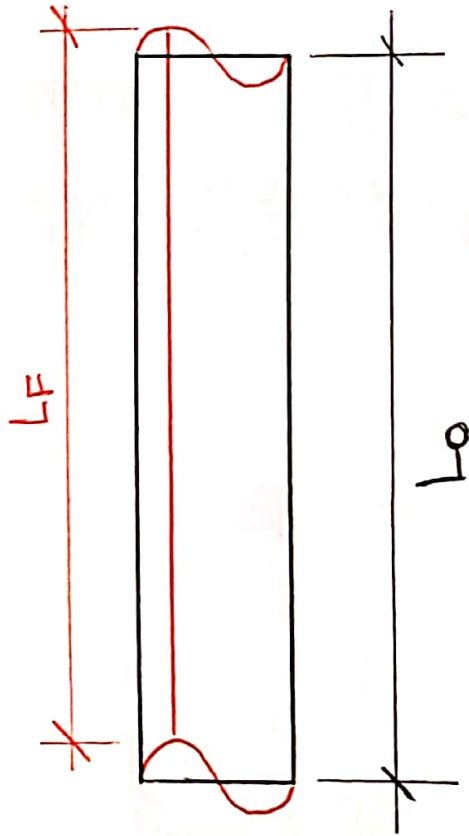
• EL ALARGO DE LAS SECCIONES PODRÁ ESTAR IMPULSADO PARCIAL O TOTALMENTE.

• EL ALARGO DE LAS SECCIONES NO ES EL MISMO. $\rightarrow$

$\rightarrow$ $\exists$ ALARGO RELATIVOS NO NULOS.

• QUEMAY FLECHA DEL ALARGO RDM CLÁSICA O MODERNA DE LAS SOLIDAS DEFORMADAS.

$$L_F - L_0 = \Delta L \quad \frac{\Delta L}{L_0} = \epsilon_x$$



$\epsilon_x \approx 0 \rightarrow$ TORSION UNIFORME.

$\epsilon_x \neq 0 \rightarrow$ TORSION NO UNIFORME.

$$E \epsilon_x = \sigma_x.$$

→ ELEM. ESTRUCTURALES



TORSION UNIFORME.

$$\rightarrow T_{NU} = T_U + T_{NU}|_{PD.}$$

↳ ESTRUCTURAS METÁLICAS. → TNU

[TNU] → TEORÍA CLÁSICA DE LAS ELASTICIDAD

↳ TEORÍA AD-ABC.

9/11

04 - CAMPO DE APLICACIÓN: - ALCANCE.

• ESTRUCTURAS } ISOESTÁTICAS
Hiperestáticas

• SECCIONES TRANSVERSALES.

I) CIRCULARES RECTAS O TRÁZIDAS
(T. DE COLUMNAS)

II) TUBULARES SIMPLEMENTE CONEXAS
DE ESPESORES DIFERENTES
(T. DE BUEY)

III) SECCIONES CONJUNTALES
• RECTANGULARES
• CIRCULARES
• TRIANGULARES
• ABIERTAS.

OS) - ECS DE EQUIVALENCIA

$$I) \quad N = 0 = \int_A \sigma_x \, dA.$$

$$II) \quad Q_y = 0 = \int_A \tau_{xy} \, dA.$$

$$III) \quad Q_z = 0 = \int_A \tau_{xz} \, dA.$$

$$IV) \quad M_x = M_r = \int (-\tau_{xy} \cdot z + \tau_{xz} \cdot y) \, dA$$

$$V) \quad M_y = 0 = \int \sigma_x \cdot z \, dA$$

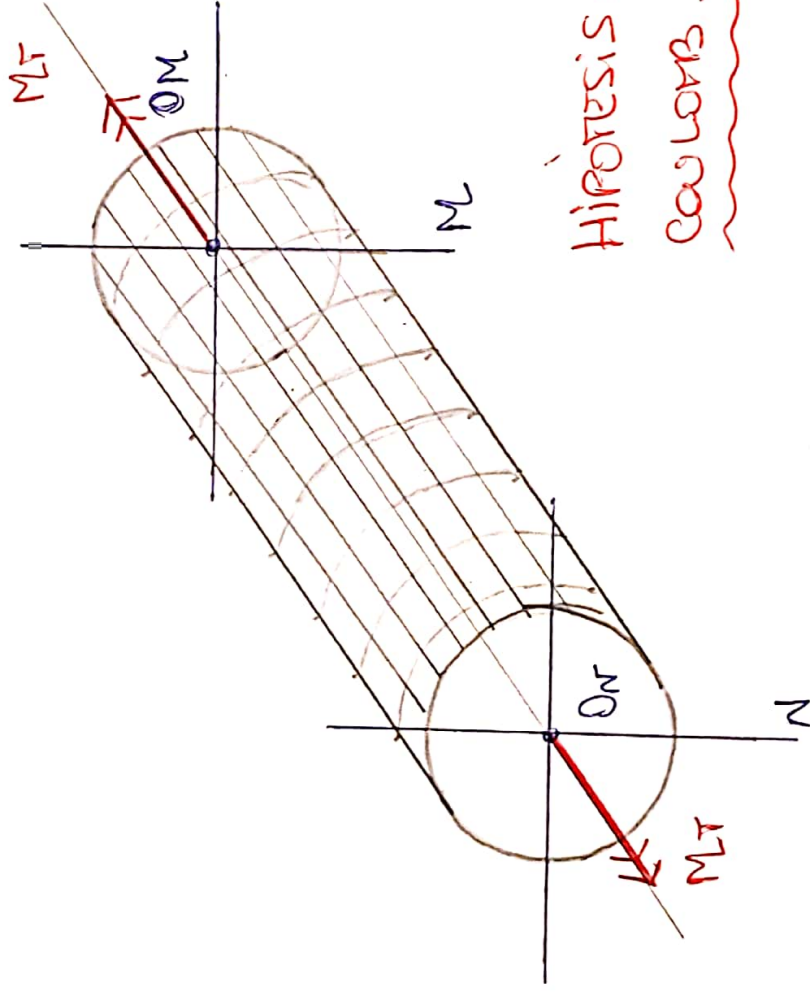
$$VI) \quad M_z = 0 = \int -\sigma_x \cdot y \, dA.$$

10/11

11/11

06) - TEORÍA DE COULOMB:

• BARRA CILÍNDRICA. L, D, A .



HIPOTESIS DE COULOMB.

H1) -

LAS SECCIONES QUE ORIGINALMENTE ERAN PLANAS. SEGUEN PERMANECIENDO DE LA DEFORMACIÓN POR TORSIÓN Y SE MANTIENEN PARALELAS A SÍ MISMAS.

H2) -

LAS SECCIONES MANTIENEN SU FORMA. INICIALMENTE LA SECCIÓN, ERAN UN CÍRCULO, DESPUÉS SIGUE SIENDO UN CÍRCULO.

H3) -

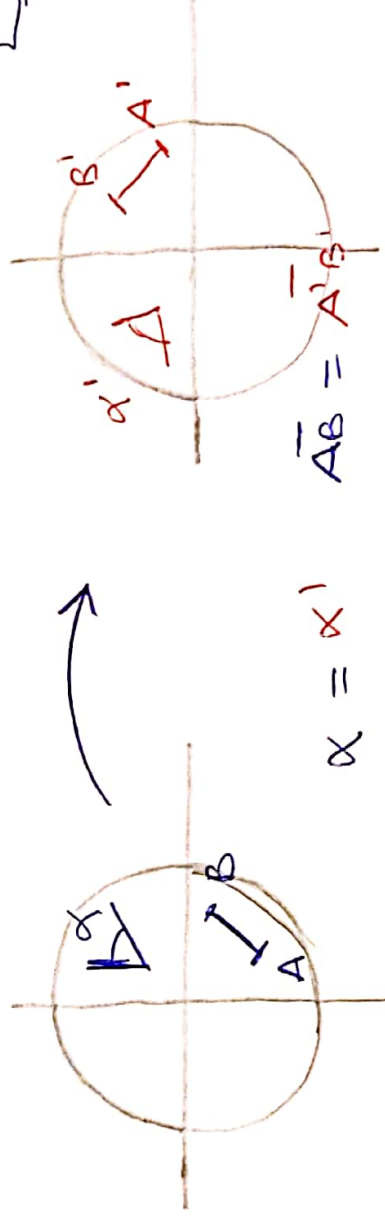
LAS SECCIONES GIRAN UNAS RESPECTO DE LAS OTRAS, ALREDEDOR DEL EJE DE LA BARRA.

1) 20

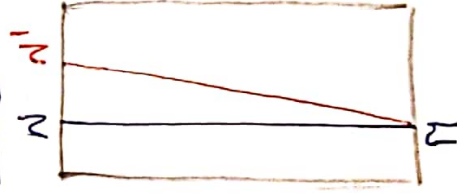
H1) → PLANAS Y PARALELAS → NO SE ALABERAN.

COROLARIOS
DE LAS
HIPÓTESIS
DE
CAYLEY.

H2) → MANTIENE SU FORMA → Círculo → Círculo.



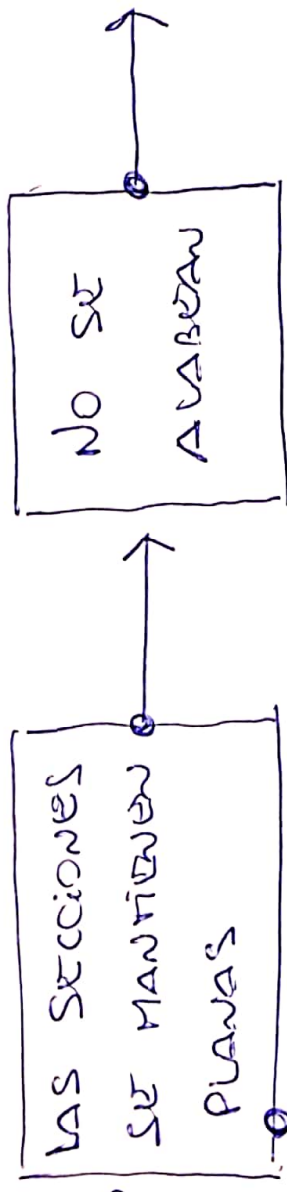
H3) → GIRAN ALREDEDOR } → I) LAS GENERADORAS EN
DEL EJE HELICES DE PASO MAYOR
N N' GRANDE.



II) LAS SECCIONES EXPERIMENTAN
EFECTOS RELATIVOS.

07) - ECS. DE EQUIVALENCIA:

LAS FIBRAS
VARÍAN SU
LONGITUDS ??



$$\Delta L = 0$$

$$\text{I) } \epsilon = 0$$

$$\text{II) } \epsilon = \text{cte}$$

$$\Delta L = \text{cte}$$

1º CASO

$$\epsilon_x = 0$$

→ HODAR

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{L} \cdot \underbrace{\epsilon_x}_{=0}$$

$$\bar{\sigma}_x = 0 \rightarrow$$

1º } SE SATISFACEN
2º }
3º }

3/20

2º caso

$$E_x = cte \rightarrow \sigma_x = E \epsilon_x = cte \rightarrow 1^\circ \text{ EC. EQ. } \vec{N} = 0 = \int_A \sigma_x \cdot dA$$

$$0 = \sigma_x \int_A dA \rightarrow 0 = \int_A dA$$

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ \\ 2^\circ \\ 3^\circ \end{array} \right\} \text{ se satisfacen}$$

$$\boxed{\sigma_x = 0}$$

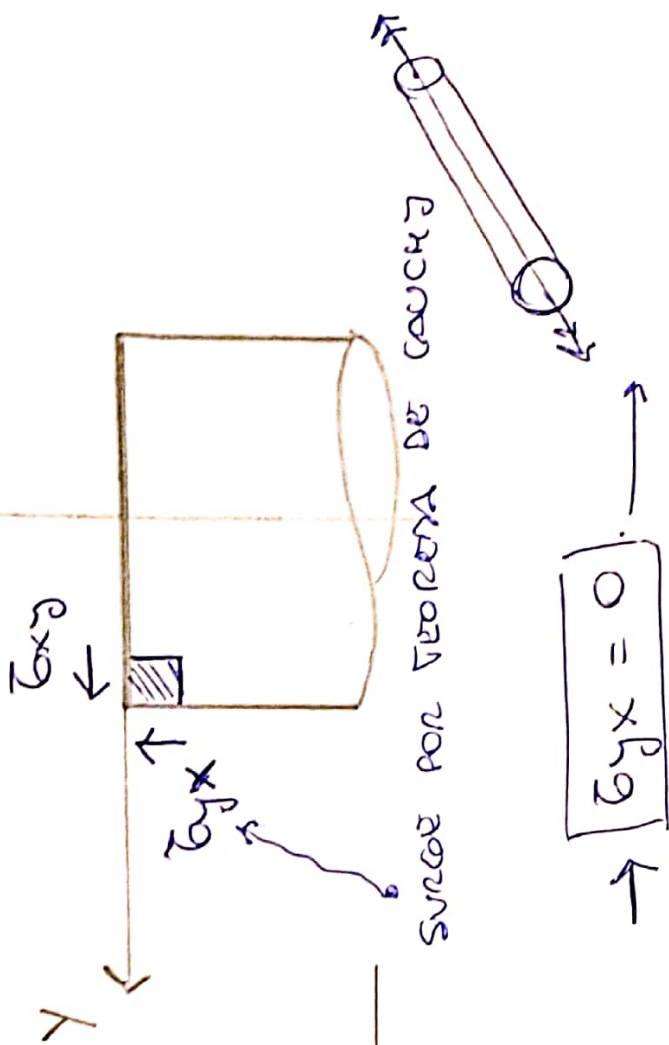
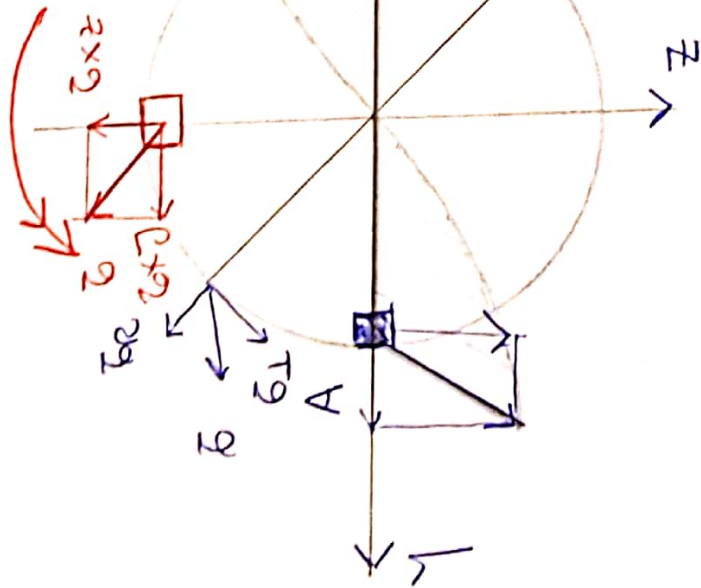
no es posible

2º y 3º ECS. DE EQUIVALENCIA:

$$2^\circ) Q_y = 0 = \int_A \tau_{xy} dA$$

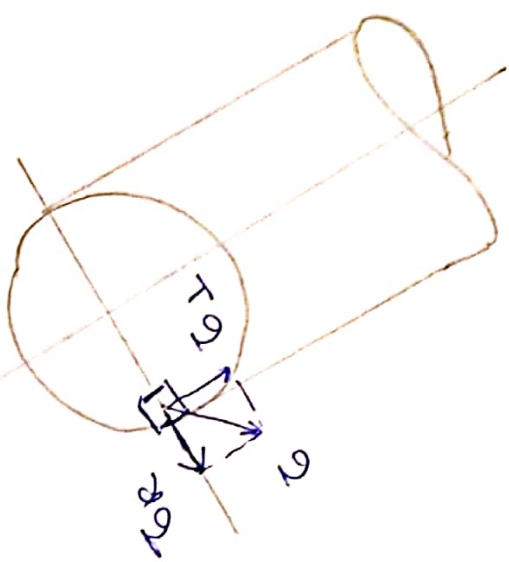
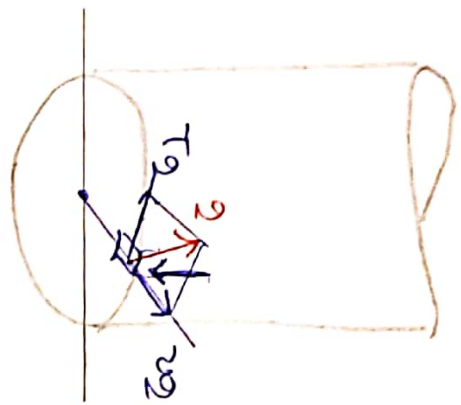
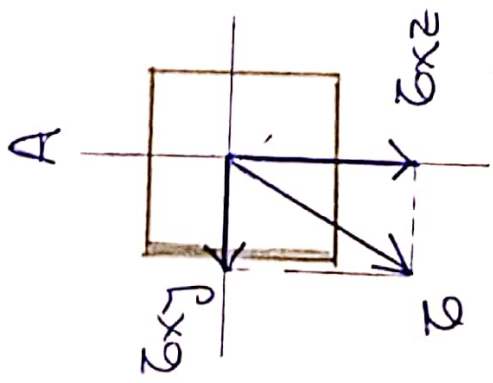
$$3^\circ) Q_z = 0 = \int_A \tau_{xz} dA$$

MLT.



$$\tau_{yx} = 0$$

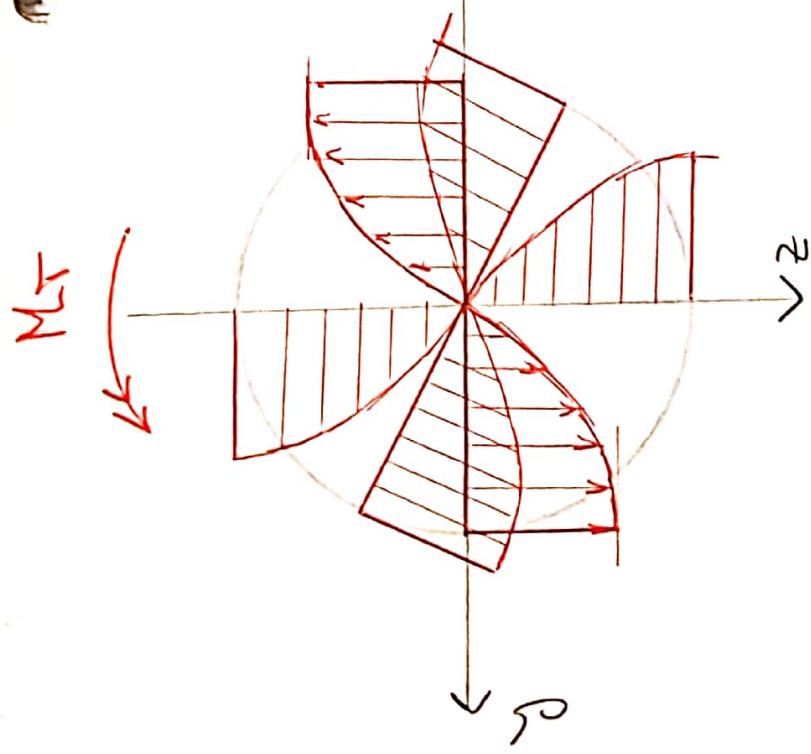
→ LAS TENSIONES RADIALES SON NULAS



S/20

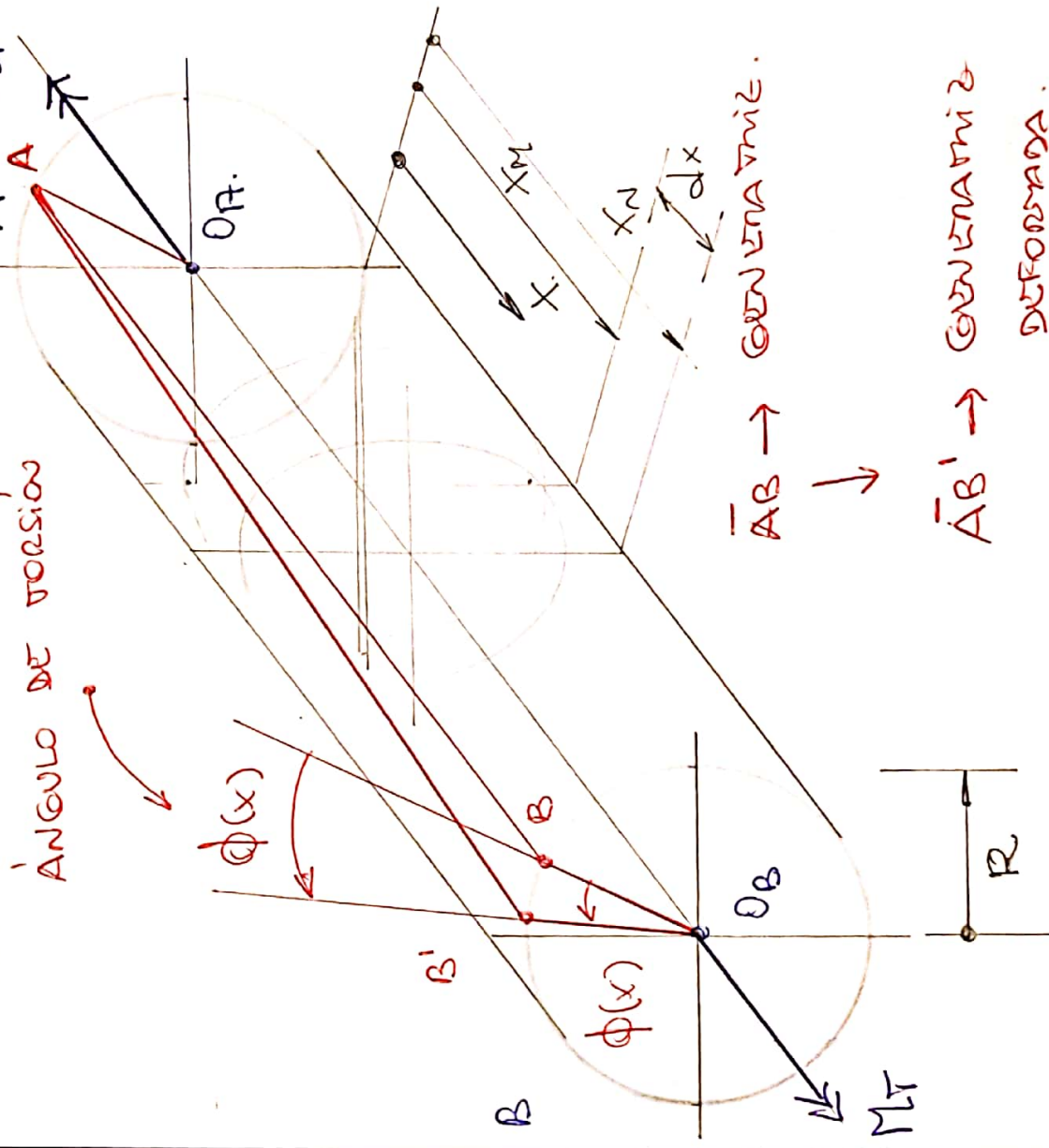
→ CONOCER LA LEY DE DISTRIBUCIÓN DE LAS TENSIONES TANGENCIALES. A MT

ÁNGULO DE TORSIÓN



LA DISTRIBUCIÓN ES:

- ANSISIMÉTRICA
- DIRECCIÓN $\perp$ AL DIÁMETRO (O RADIO)

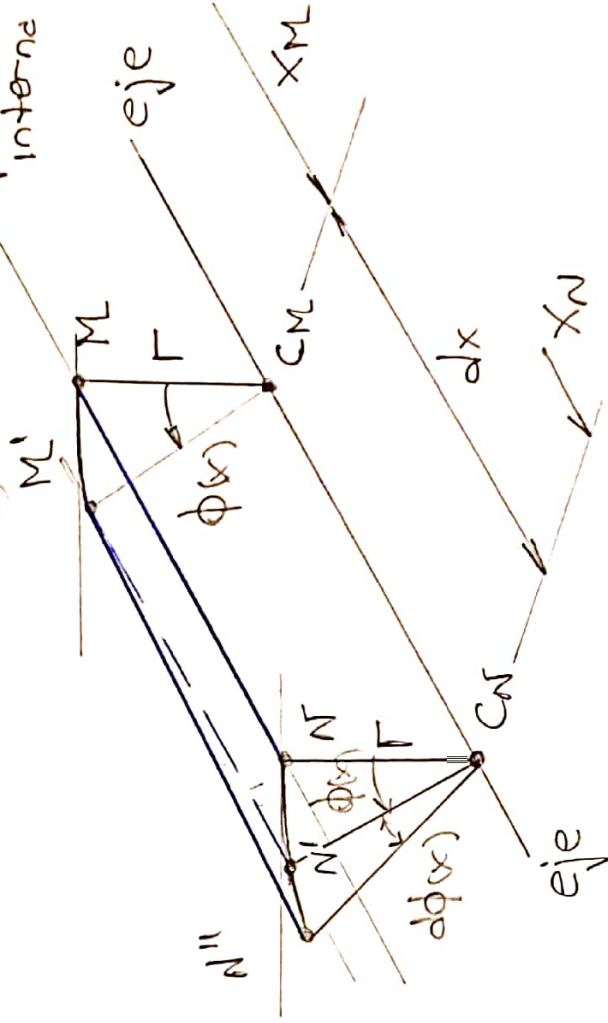
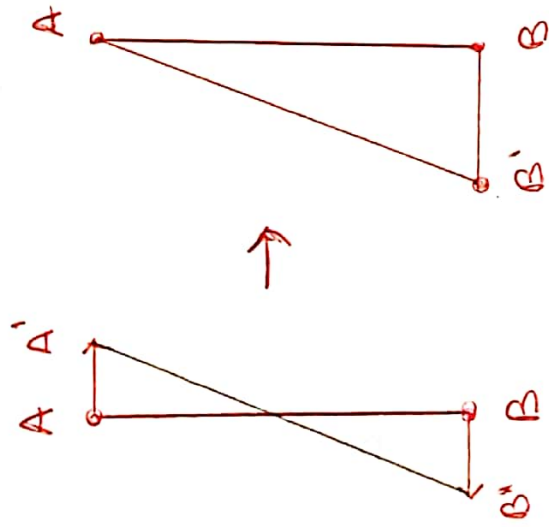


$\bar{A}B \rightarrow$ CONVENCIONAL

$\bar{A}B' \rightarrow$ CONVENCIONAL DEFORMADA

6/20

generatriz
interne

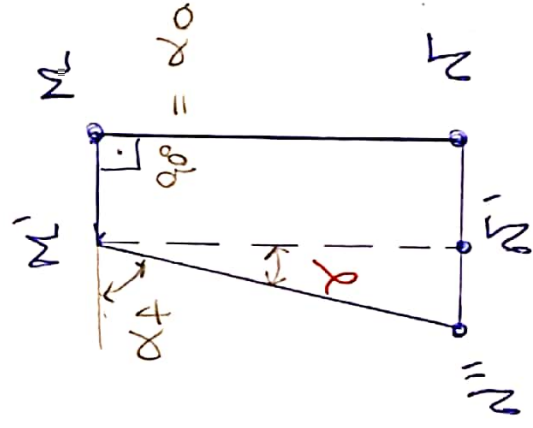


$\overline{MN}$: GENERATRIZ

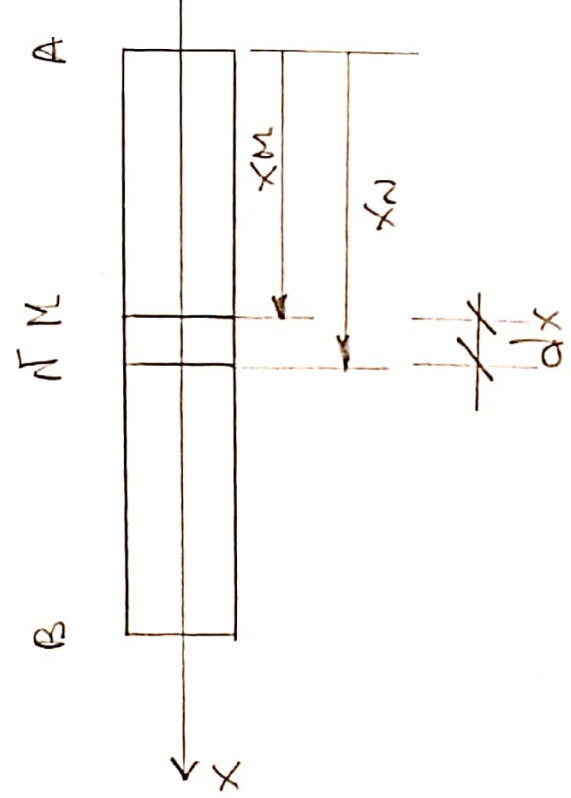
SIN DEFORMAR

$\overline{M''N''}$: GENERATRIZ

DEFORMADA.



$$\alpha_0 - \alpha_f = 90^\circ - \alpha_f = \gamma \text{ (distorsión)}$$



7/20

$$\phi_M = \phi(x)$$

$$\phi_N = \phi(x) + d\phi(x).$$

$$\Delta\phi_{NM} = \phi_N - \phi_M = d\phi(x).$$

$$\begin{aligned} \text{Arco } N'N'' &= \dot{\Gamma} \cdot d\phi(x). \\ N'N'' &= \gamma \cdot dx. \end{aligned}$$

$$\gamma \cdot dx = \dot{\Gamma} d\phi(x).$$

$$\gamma = \dot{\Gamma} \cdot \boxed{\frac{d\phi(x)}{dx}} = \dot{\Gamma} \cdot \underbrace{\frac{d\phi(x)}{dx}}_{\text{curvatura de torsión}}.$$

$\chi(x)$: curvatura de torsión o
ángulo específico de
torsión.

$$0 \leq r \leq R \rightarrow \gamma \rightarrow \text{variación lineal}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma = 0 &\rightarrow \gamma = 0. \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma = R &\rightarrow \gamma = \gamma_{\max} = R \cdot \frac{d\phi(x)}{dx}. \end{aligned} \right.$$

$$\frac{\gamma}{\Gamma} = \frac{d\phi(x)}{dx}$$

$$\rightarrow \frac{\gamma}{\Gamma} = \frac{\gamma_{\max}}{R}$$

$$\frac{\gamma_{\max}}{R} = \frac{d\phi(x)}{dx}.$$

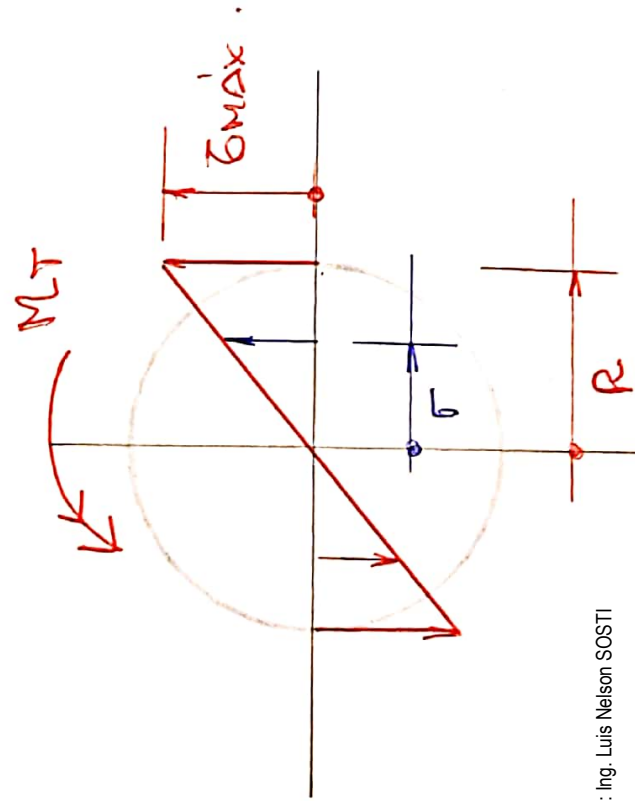
$$\gamma = \gamma_{\max} \cdot \frac{\Gamma}{R}$$

APLICAMOS LEY DE HOOKE

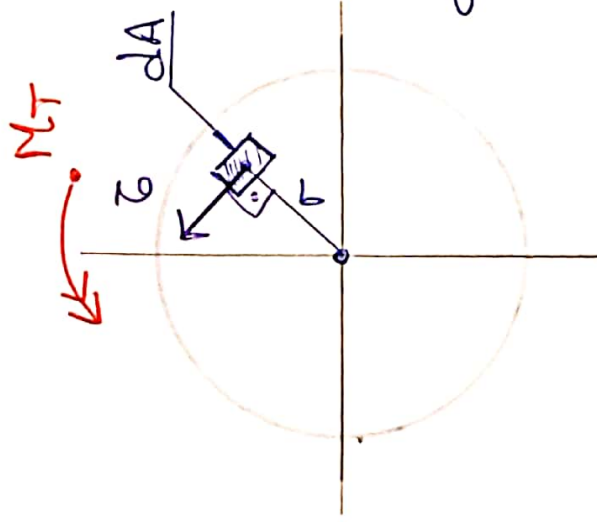
$$\tau = G \cdot \gamma \rightarrow \boxed{\gamma = \frac{\tau}{G}}$$

$$\frac{\tau}{G} = \frac{\tau_{\max}}{G} \cdot \frac{r}{R} \rightarrow$$

$$\boxed{\tau(r) = \tau_{\max} \cdot \frac{r}{R}}$$



8/20



$$\frac{dT}{\text{Diferencial de Fuerzas}} = \tau \cdot dA$$

$$dM_T = r \cdot dT$$

$$dM_T = r \cdot dT = \tau \cdot r \cdot dA$$

$$M_T = \int_A dM_T = \int_A \tau \cdot r \cdot dA$$

$$M_T = \int_A \frac{\tau_{\max}}{R} \cdot r^2 dA = \frac{\tau_{\max}}{R} \cdot \int_A r^2 dA$$

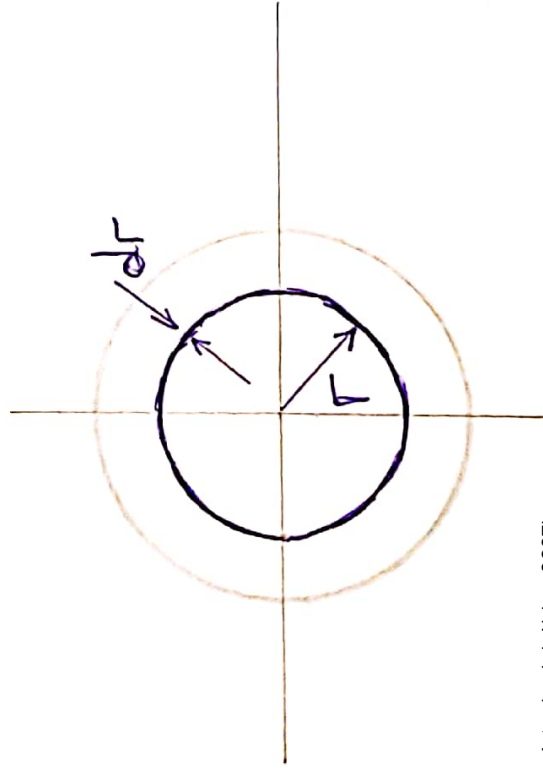
$$M_T = \frac{\tau_{\max}}{R} \cdot I_P \rightarrow$$

9/20

$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{I_P} \cdot R.$$

$$\tau_{\max}(x, R) = \frac{M_T(x)}{I_P(x)} R(x).$$

$$\tau(x, r) = \frac{M_T(x)}{I_P(x)} \cdot r$$



$$dA = 2\pi r \cdot dr$$

$$dI_P = r^2 \cdot dA.$$

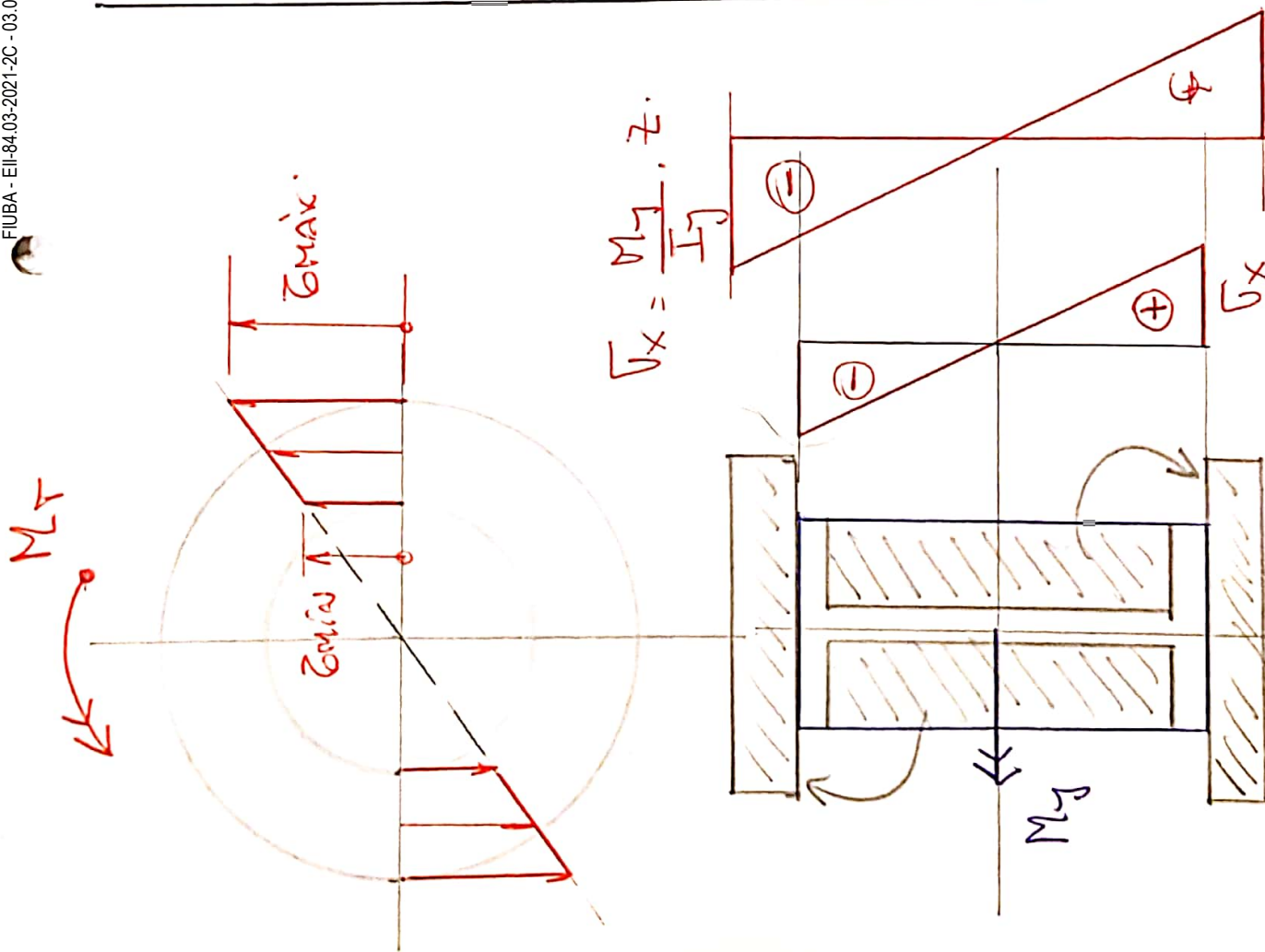
$$I_P = \int dI_P = \int_0^R r^2 dA = \int_0^R 2\pi r^3 dr$$

$$I_P = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi \Phi^4}{32}$$

$$I_P = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi \Phi^4}{32}$$

$$I_P = \frac{\pi}{2} [R^4 - r_i^4] = \frac{\pi}{32} [\Phi^4 - \phi_i^4]$$

10/20



Ángulo de torsión:

$$\gamma_{max} = R \cdot \frac{d\phi(x)}{dx} = \frac{\tau_{max}}{G}$$

$$d\phi(x) = \frac{\tau_{max}}{G} \cdot \frac{1}{R} dx$$

$$\phi(x) = \int d\phi(x) = \int \frac{\tau_{max}}{G} \cdot \frac{1}{R} dx$$

$$\phi(x) = \int \frac{M_T(x)}{G I_P} \cdot \frac{R}{R} dx$$

$$\phi(x) = \int \frac{M_T(x)}{G I_P} dx$$

11/20

$$\bullet \text{ Si } \left\{ \begin{array}{l} M_T(x) = \text{cte} \\ G \cdot I_P = \text{cte} \end{array} \right.$$

$$\phi(x) = \frac{M_T \cdot x}{G \cdot I_P}$$

$$x=L \rightarrow \phi(x=L) = \frac{M_T \cdot L}{G \cdot I_P}$$

$$\boxed{x(x) = \frac{d\phi(x)}{dx} = \frac{M_T(x)}{G \cdot I_P}}$$

Magnitud

SA

ST

$$N \equiv N(x)$$

$$G_x(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$$

$$\tau_{max}(x) = \frac{M_T(x)}{I_P(x)} \cdot R$$

$$\tau(x,r) = \frac{M_T(x)}{I_P(x)} \cdot r$$

$$\delta(x) = \Delta L(x) = \int \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} dx$$

$$\phi(x) = \int \frac{M_T(x)}{G \cdot I_P(x)} dx$$

Cinematicas

$$e_x(x) = \frac{d\delta(x)}{dx}$$

$$x(x) = \frac{d\phi(x)}{dx}$$

$$\gamma(x,r) = r \cdot \frac{d\phi(x)}{dx}$$

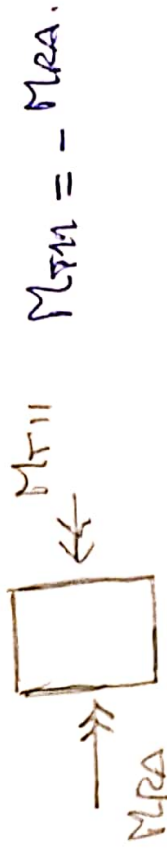
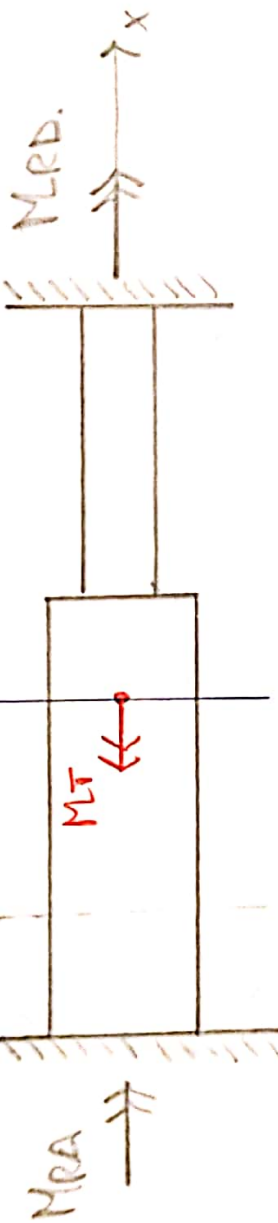
12/20

EXEMPLO Nº 01:

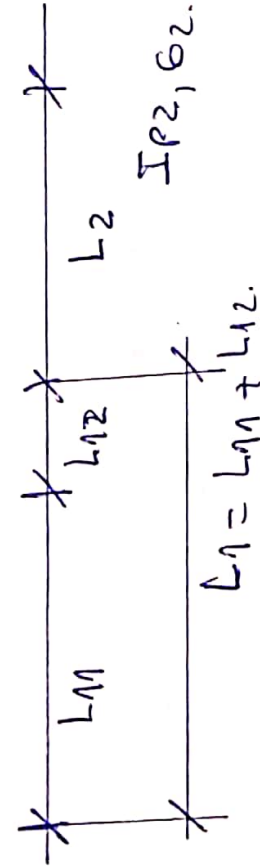
→ HIPOTÉTICO POR VÍNCULO EXTERNO.

D.

$$\Delta\phi_{BA} = \frac{M_{TA} L_1}{G_1 I_{P1}}$$



$$M_{TA} = -M_{DA}$$



I_{P1}, G_1

$$\sum M_x = 0 \rightarrow \text{EC. DE EQUILÍBRIO.}$$

$$M_{DA} + M_{DB} - M_T = 0$$

EC. DE COMPATIBILIDAD DE LOS DESPLAZAMIENTOS

$$\Delta\phi_{DA} = 0 \rightarrow \phi_D - \phi_A = 0$$

$$\Delta\phi_{BA} + \Delta\phi_{CB} + \Delta\phi_{DC} = 0$$

$$\Delta\phi_{BA} = -\frac{M_{DA} L_1}{G_1 I_{P1}}$$

$$\Delta\phi_{CB} = \frac{M_{TD} L_2}{G_2 I_{P2}}, \quad M_{TD} = -M_{DA} + M_T$$

$$\Delta\phi_{CB} = -\frac{(M_{DA} - M_T) L_2}{G_1 I_{P1}}$$

$$\Delta\phi_{DC} = \frac{M_{TD} L_2}{G_2 I_{P2}} = -\frac{(M_{DA} - M_T) L_2}{G_2 I_{P2}}$$

$$-\frac{M_{DA} L_1}{G_1 I_{P1}} - \frac{(M_{DA} - M_T) L_2}{G_1 I_{P1}} -$$

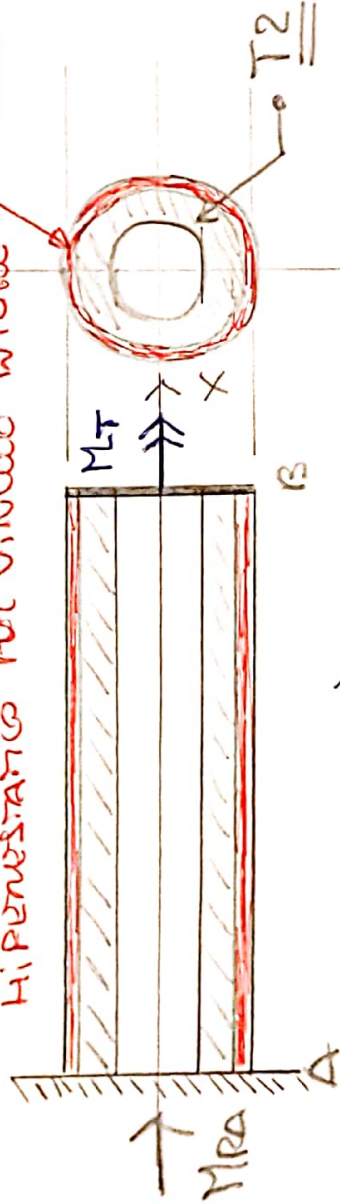
$$-\frac{(M_{DA} - M_T) L_2}{G_2 I_{P2}} = 0$$

Autor: Ing. Luis Nelson SOSTI

13) 20

EJEMPLO N° 02:

HIPERESTATICO POR VINCULO WIERNO



• 2 TUBOS CONCENTRICOS QUE SON SOLIDARIAMENTE.

EC. DE EQUILIBRIO:

$$\underline{\Sigma M_A = 0} \quad M_{RA} + M_T = 0.$$

EC. COMPATIBILIDAD DE LOS DESPLAZAMIENTOS:

$$\phi_1(x) = \phi_2(x)$$

$$x = L \quad \phi_1(x=L) = \phi_2(x=L).$$

$$\frac{M_{T1} L}{G_1 I_{p1}} = \frac{M_{T2} L}{G_2 I_{p2}}$$

SOLUT. INTERNA

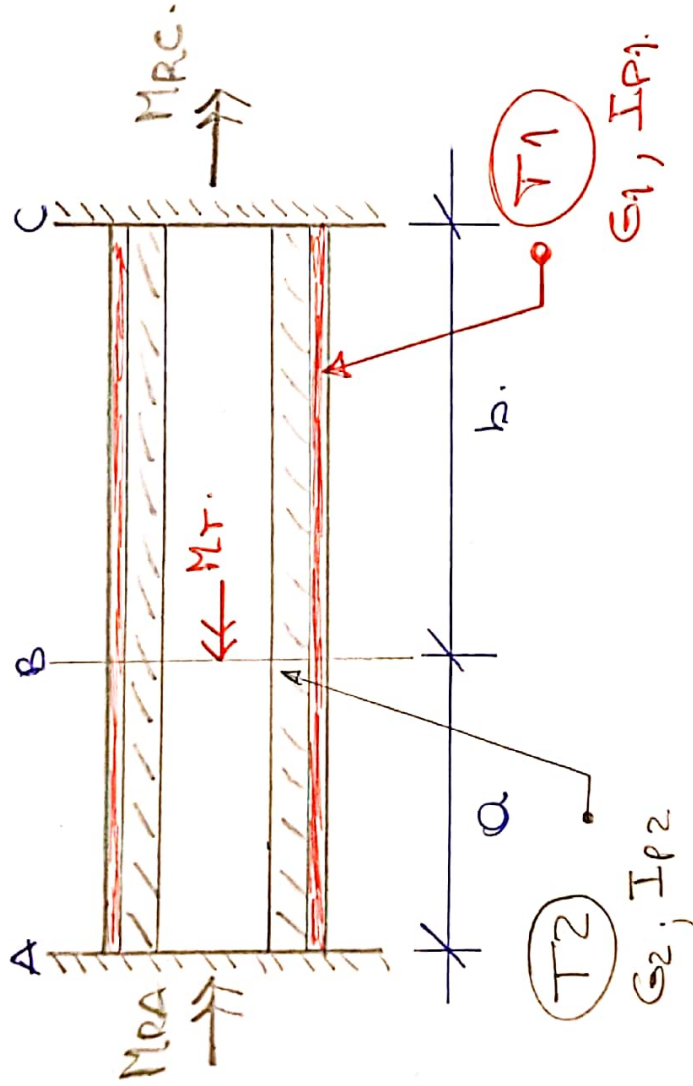
$$M_T(x) = M_{T1} + M_{T2}.$$

$$M_T \quad \text{dato.}$$

14/20

EJEMPLO N° 03:

HIPERESTÁTICO POR VÍNCULO EXTERNO E INTERNO.



- 2 TUBOS CONJUNTOS QUE SEAN SUDAMAMENTE.

EC. DE EQUILIBRIO GLOBAL:

$$\sum M_x = 0 \rightarrow M_{ra} + M_{rb} - M_r = 0$$

EC. DE COMPATIBILIDAD DE LOS DESPLAZAMIENTOS GLOBALES.

$$\Delta \phi_{CA} = 0.$$

$$\Delta \phi_{CA} = \Delta \phi_{BA} + \Delta \phi_{CB}.$$

$$\Delta \phi_{BA} = \frac{M_{ra} a}{G I_P} = - \frac{M_{ra} a}{G I_P}.$$

$$\Delta \phi_{CB} = \frac{M_{rb} b}{G I_P} = - \frac{(M_{ra} - M_r) b}{G I_P}.$$

$$- \frac{M_{ra} a}{G I_P} - \frac{(M_{ra} - M_r) b}{G I_P} = 0$$

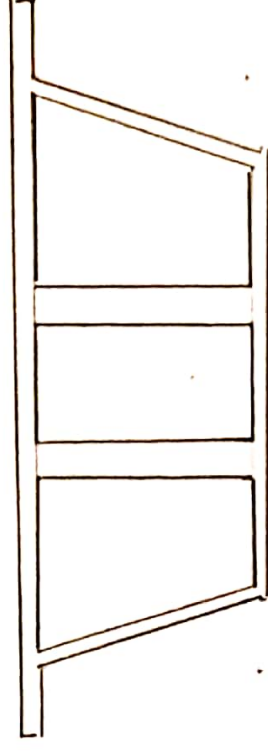
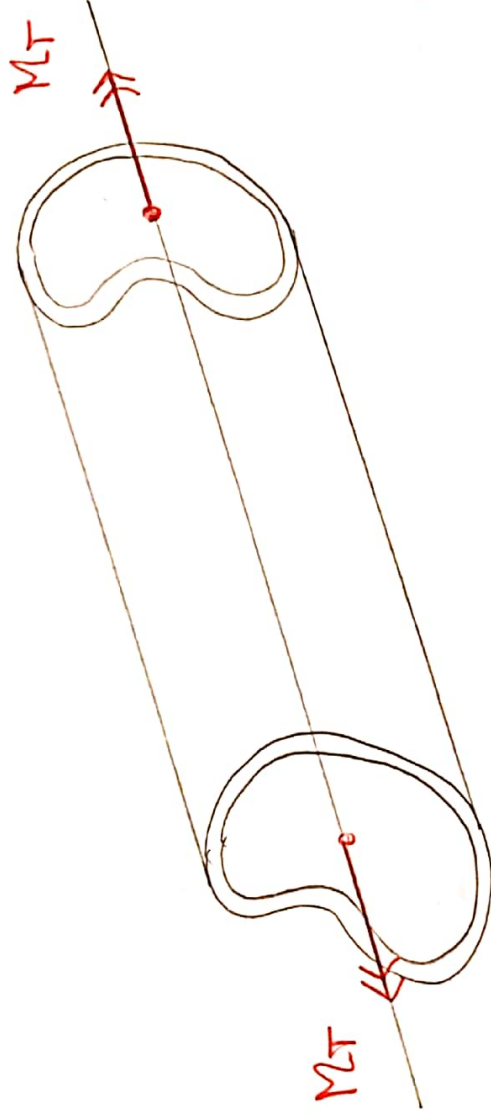
$$M_r b = M_{ra} (a + b).$$

$$M_{ra} = M_r \cdot \frac{b}{a + b}.$$

$$M_{re} = M_r \cdot \frac{a}{a + b}.$$

16/20

SECCIONES TUBULARES SIMPLEMENTE CONEXAS DE PEQUEÑO ESPESOR

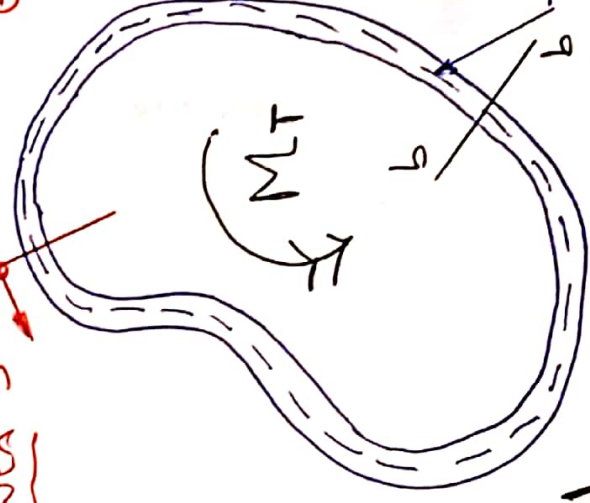


COORDENADA
CURVILÍNEA s

$$e(s) = t(s)$$



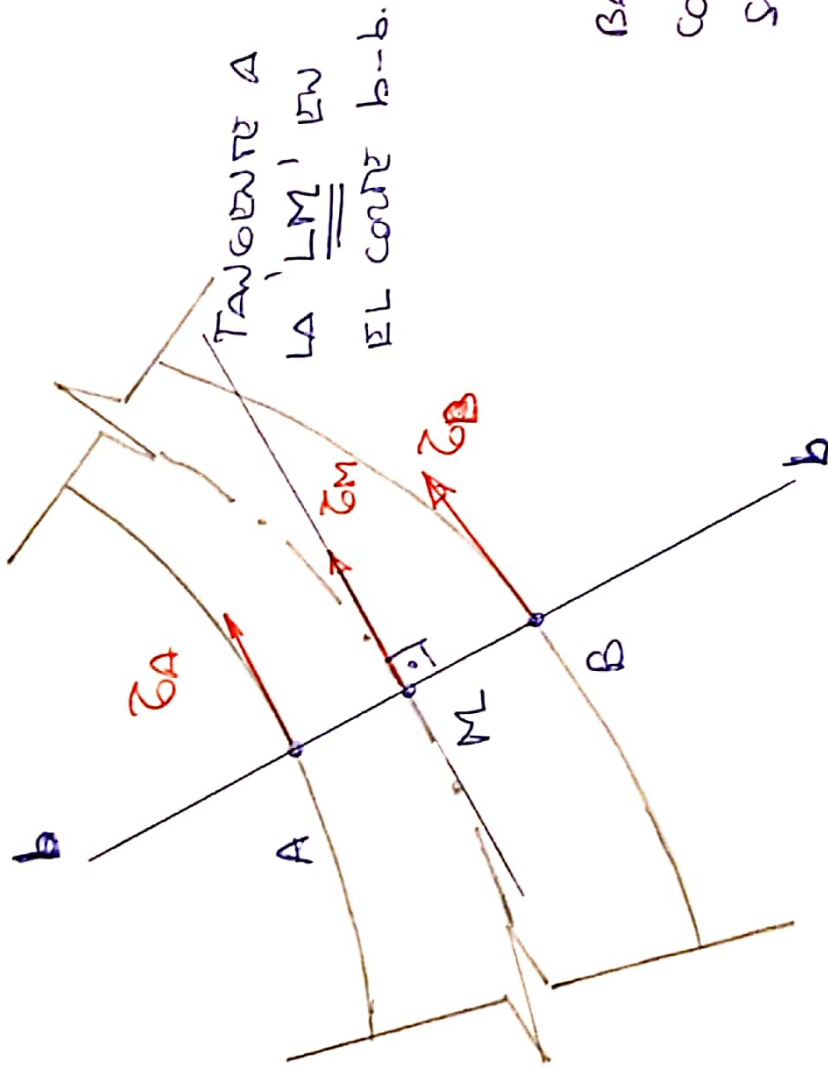
EL ESPESOR
ES
VARIABLE.



$b-b$: ES $\perp$

A LA TANGENTE DE LA LÍNEA MEDIA
DE ESE CORTE

LÍNEA
MEDIA



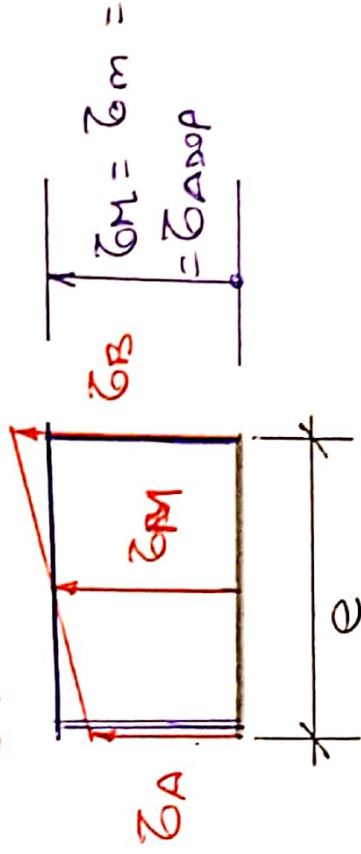
σ_A ES TANGENTE AL BORDO INTERNO EN 'A'

σ_B " " " " EXTERNO EN 'B'.

σ_B ES " " LA 'LM' EN B.

17/20

$\sigma_A < \sigma_M < \sigma_B$.



2 SUPOSICIONES:

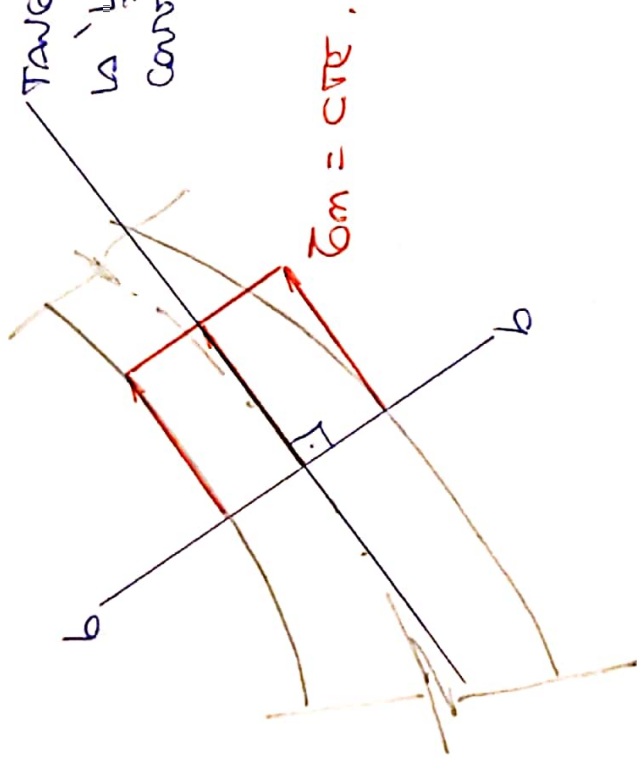
BASADO EN QUE 'e' ES MUY CHICO.
COMPARANDO LAS DIMENSIONES DE LA SECCIÓN:

I) AL VALOR SE ADOPTA EL DE σ_M . COMO CONSTANTE EN EL ESPESOR.

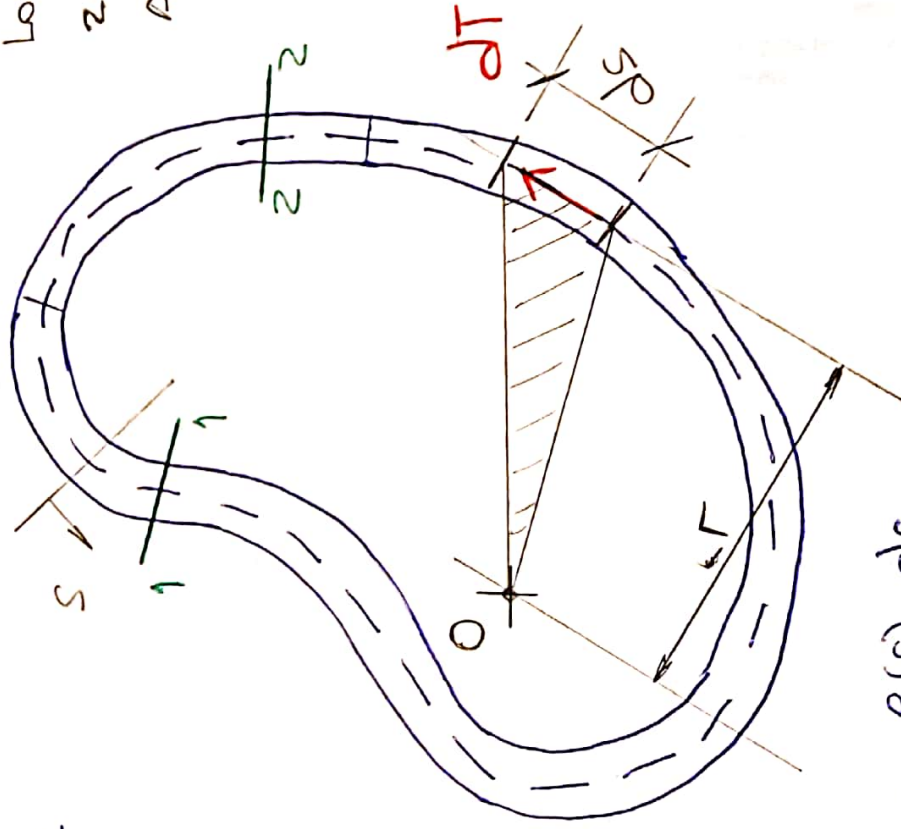
II) LA DISTRIBUCIÓN SERÁ LA DE LA TANGENTE EN LA LÍNEA NEUTRA.

18/20

TANGENTE A
LA 'LM' DE LA
CURVA b-b.



LOS CORRES 1-1 y
2-2 SON $\perp$
A LA LM

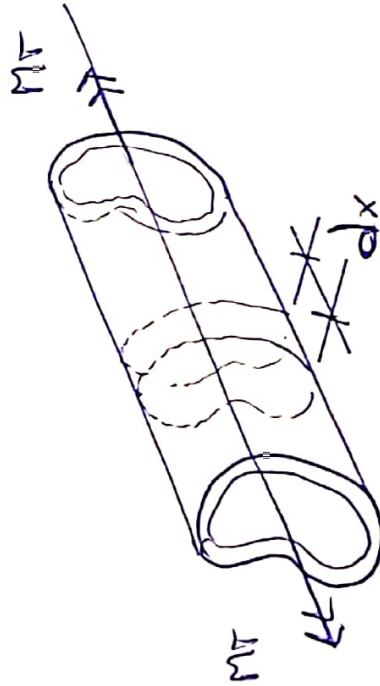


$$dA = e(s) \cdot ds$$

$$dT = \sigma_m \cdot dA = \sigma_m \cdot e \cdot ds$$

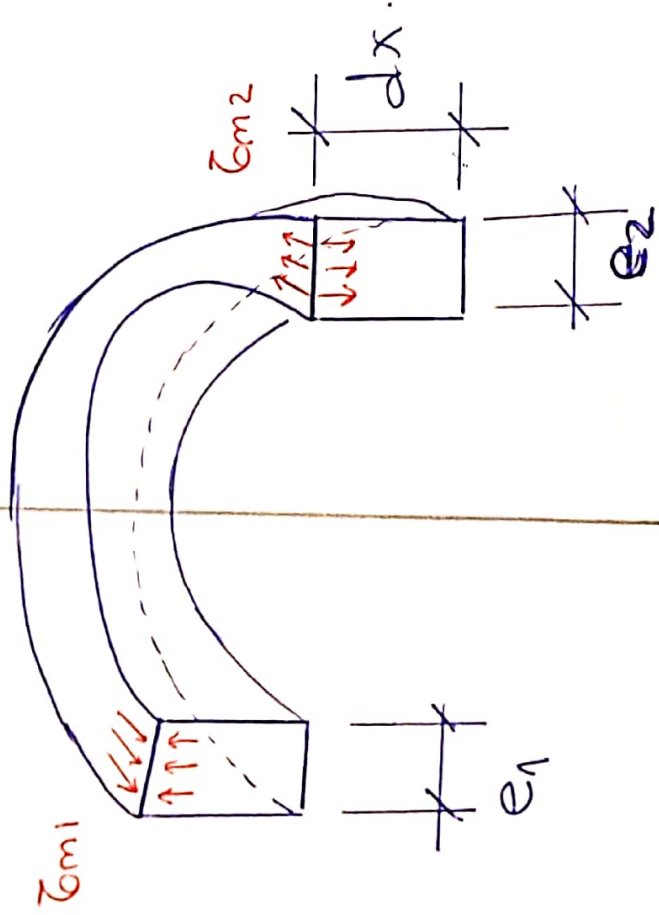
$$dM_r = r dT = \sigma_m \cdot r \cdot e \cdot ds$$

$$M_r = \int dM_r = \int \sigma_m \cdot r \cdot e \cdot ds$$



19/20

$$\tau_{m1} \cdot e_1 = \tau_{m2} \cdot e_2$$



$$\tau_{m1} \cdot e_1 = \tau_{m2} \cdot e_2 = \dots = \tau_{mi} \cdot e_i = \dots = \tau_{mn} \cdot e_n$$

$\tau_{mi} \cdot e_i$ = Flujo de la tensión por tangenciales



Fuerza por unidad de longitud.

$\tau_{mn} \cdot e = \text{cte} \rightarrow$ Se ve fuera de la integral.

$$M_T = r_{x(x)} = \tau_{mn} \cdot e \int_S ds$$

$$V_1 = \tau_{m1} \cdot e_1 \cdot dx \uparrow$$

$$V_2 = \tau_{m2} \cdot e_2 \cdot dx \downarrow$$

$$V_1 - V_2 = 0.$$

$$\tau_{m1} \cdot e_1 \cdot dx - \tau_{m2} \cdot e_2 \cdot dx = 0$$

$$dA_{\Delta} = \frac{r \cdot ds}{2} \rightarrow 2dA_{\Delta} = r \cdot ds.$$

$$M_x = \tau_m \cdot e \int_s \underbrace{r \cdot ds}_{2dA_{\Delta}}.$$

$2dA_{\Delta}$.

EL ÁREA ENCERRADA
POR LA LÍNEA MEDIAL
Y POR 2

$$\int_s dA_{\Delta} = \Omega$$

$$M_T = M_x(x) = \tau_m \cdot e \cdot 2 \Omega.$$

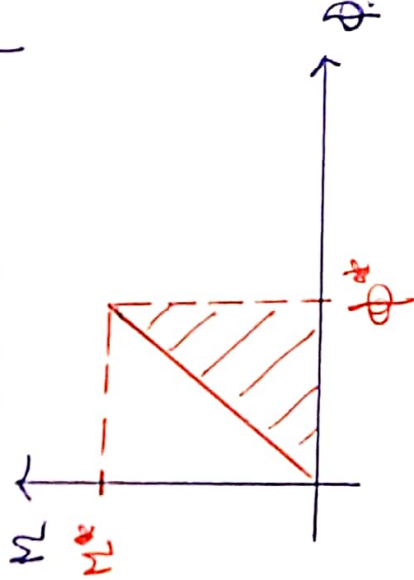
$$\tau_m(x) = \frac{M_T(x)}{2 \Omega \cdot e(s)}$$

$$\tau_{m, \max}(x) = \frac{M_T(x)}{2 \cdot \Omega_m \cdot e_{\min}}$$

1/10

ÁNGULO DE TORSIÓN:

$$dW = M \cdot d\phi$$



$$W = \int dW = \int M \, d\phi$$

$$M = k \cdot \phi \rightarrow \text{si } \phi = \phi^* \rightarrow M = M^*$$

$$\phi = \frac{M}{k}$$

$$W = \int M \, d\phi = \int k \phi \, d\phi = \frac{1}{2} k \phi^2$$

$$W = \frac{1}{2} k \frac{M^2}{k^2} = \frac{1}{2} \frac{M^2}{k} \rightarrow \underline{W^* = \frac{1}{2} \frac{M^* \phi^*}{k}}$$

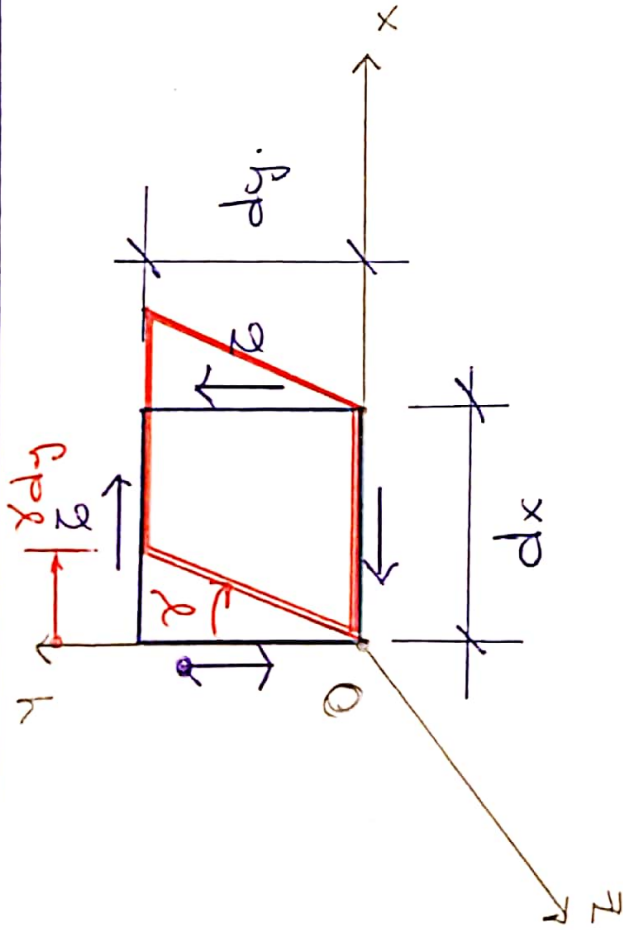
TRABAJO DE LAS FIBRAS EXTERIORES

$$W = \frac{1}{2} k \frac{M^2}{k^2} = \frac{1}{2} \frac{M^2}{k}$$

$$\underline{W^* = \frac{1}{2} M^* \phi^*}$$

2/10

ENERGÍA INTERNA DE DEFORMACIÓN



$$dU_i = \frac{1}{2} \tau \gamma \cdot \frac{dx \cdot dz}{dV}$$

$$U_i = \int_V dU_i = \int_V \frac{1}{2} \tau \gamma dV$$

$$\tau = G \gamma \quad \gamma = \frac{\tau}{G}$$

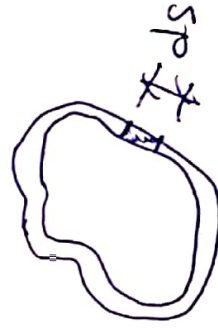
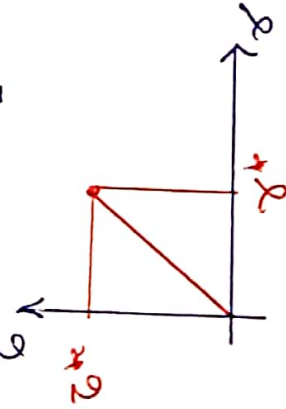
$$U_i = \int_V \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} dV$$

$$dF = \tau \cdot dx \cdot dz$$

$$W = U$$

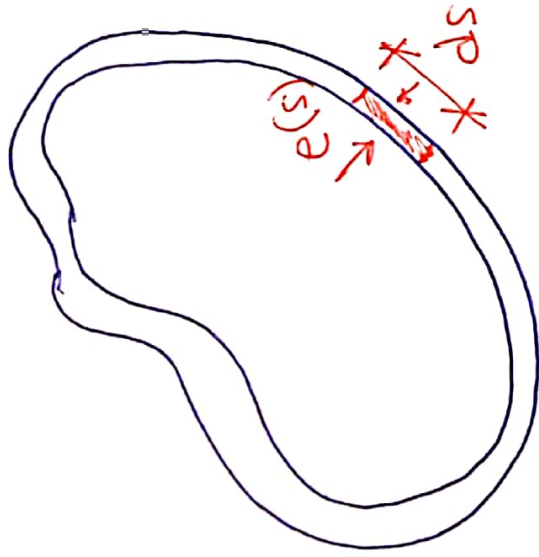
Relación lineal entre tensiones y deformaciones. $\frac{1}{2} U \phi = \int_V \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} dV$

$$dU_i = \frac{1}{2} [\tau dx dz] \gamma dy \quad dV = \frac{1}{2} \cdot e(s) \cdot ds$$



$$\tau = \frac{M r}{2 \Omega e} \rightarrow \tau^2 = \frac{M^2 r^2}{4 \Omega^2 e^2}$$

3/10



$$\frac{\Delta s_i}{e} + \frac{\Delta s_i}{e}$$

1ª Aproximación:

$$\phi(x) = \frac{M_T(x)}{4 \Omega^2 G} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta s_i}{e_{mi}}$$

2ª Aproximación: $\Delta s_i = cte$

$$\phi(x) = \frac{M_T(x)}{4 \Omega^2 G} \cdot \Delta s \sum_{i=1}^n \frac{1}{e_{mi}}$$

3ª Aproximación: $e_{mi} = cte$

$$\phi(x) = \frac{M_T(x)}{4 \Omega^2 G} \cdot \frac{s}{e}$$

S: Longitud de la ~~línea~~ ~~línea~~

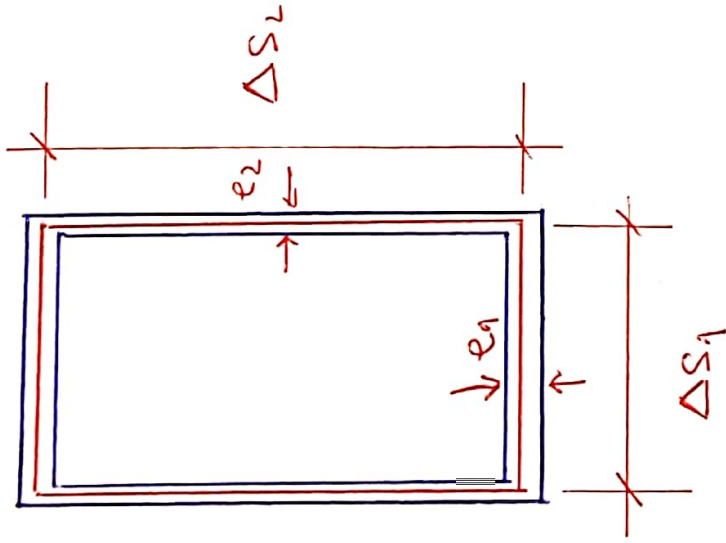
LÍNEA MEDIA.

$$\frac{1}{2} M_T \phi = \int_s \frac{1}{2} \frac{M_T^2}{4 \Omega^2 e^2} \frac{1}{G} ds$$

$$\frac{1}{2} M_T \phi = \frac{1}{2} \frac{M_T^2}{4 \Omega^2 G} \int \frac{ds}{e(s)}$$

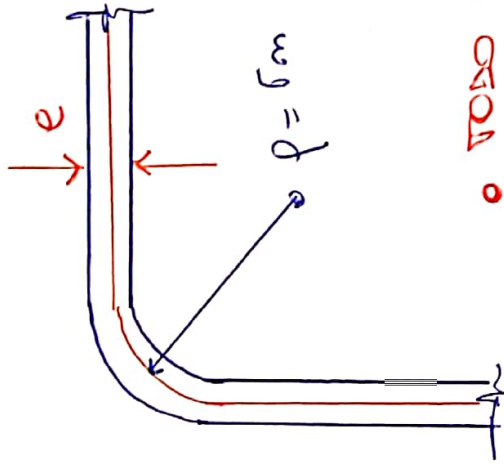
$$\phi(x) = \frac{M_T(x)}{4 \Omega^2 G} \int_s \frac{ds}{e(s)}$$

4/10



$$\frac{\Delta S_1}{e_1} + \frac{\Delta S_2}{e_2} + \frac{\Delta S_1}{e_1} + \frac{\Delta S_2}{e_2}$$

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\Delta S_i}{e_i}$$

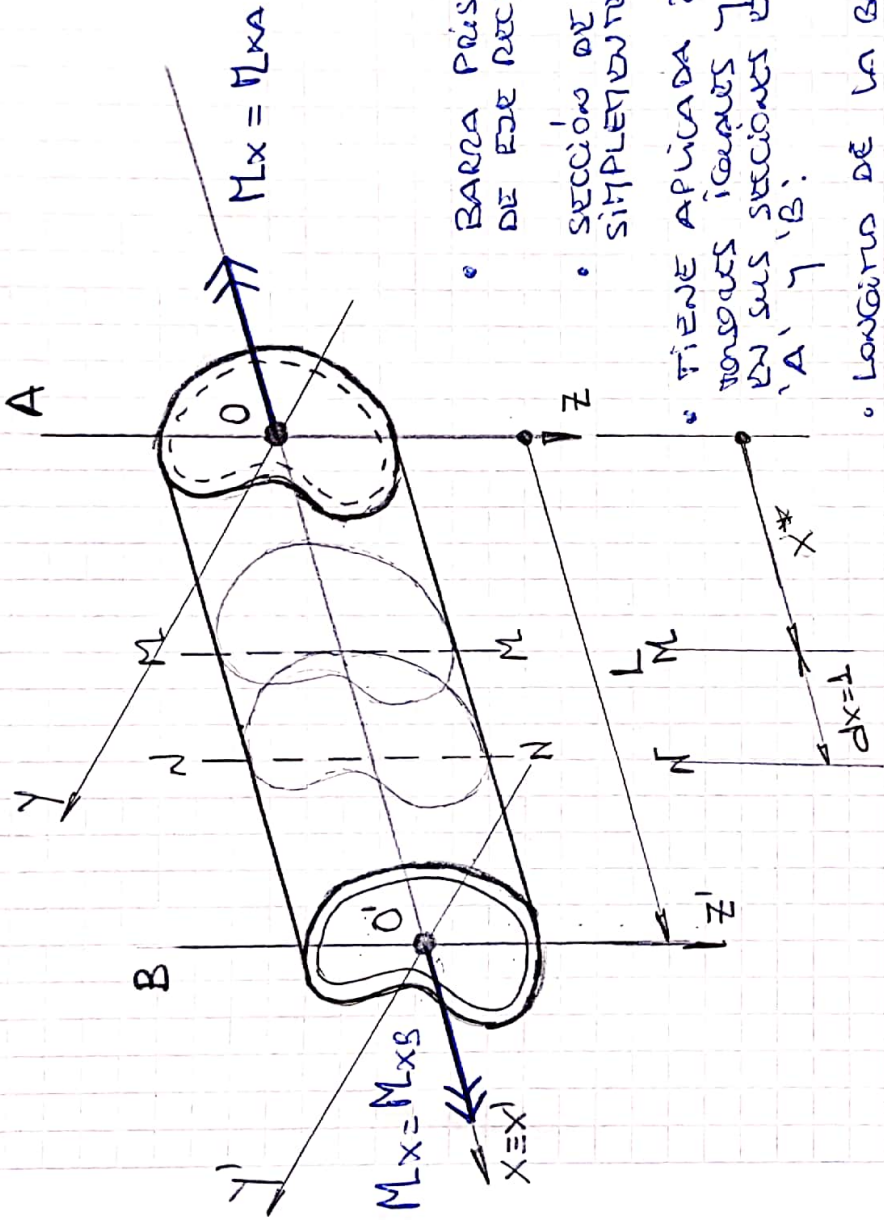


• TODO EL DESARROLLO ES
VA'UO SI :

$$p > e$$

NO

• Si $p \approx e \rightarrow$ ES VA'UO.



- BARRA PRISMÁTICA DE EJE RECTO HUECO
- SECCIÓN DE $A = \text{cte}$ SIMPLEMENTE CONEXA
- TIENE APLICADA 2 NORMALES IGUALES Y OPUESTAS EN SUS SECCIONES EXTERNAS 'A' Y 'B'.
- LONGITUD DE LA BARRA 'L'

• LA BARRA ESTÁ EN EQUILIBIO POR LAS FUERZAS EXTERNAS M_{x_A} Y M_{x_B} , TAL QUE CUMPLE

$$M_{x_A} + M_{x_B} = 0.$$

• SE CONSIDERA UNA RESEÑA ELEMENTAL ~~DE LONGITUD dx~~

• LAS SECCIONES EXTERNAS SE DENOTAN:

SECCIÓN 'N': EN $x = x^* = x_M$

SECCIÓN 'N': EN $x = x^* + dx = x_N$.

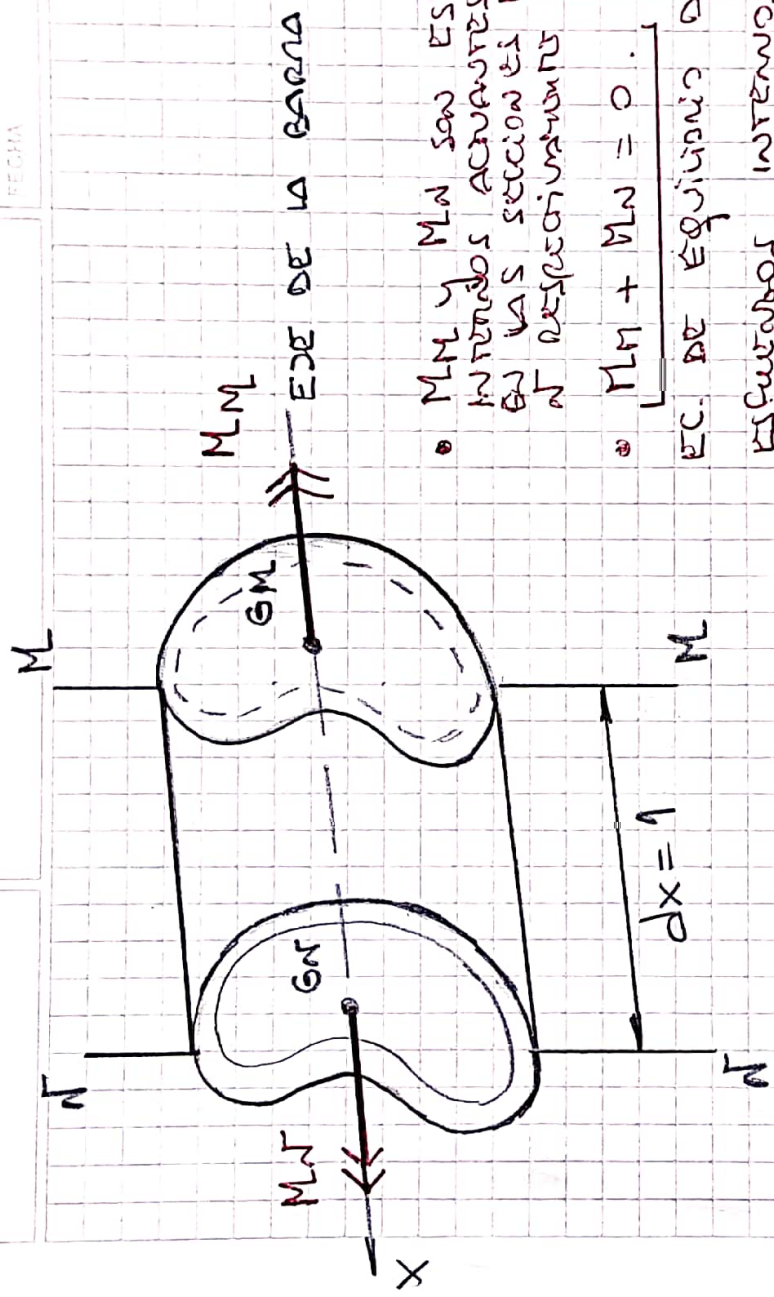
Luego:

$$x_N = x_M + dx = x_M + 1.$$

Por ser:

$$dx = 1.$$

→ EL EQUILIBIO QUEDA SATISFECHO ENTRE FUERZAS EXTERNAS.



- M_M y M_N son esfuerzos internos actuantes en las secciones M y N respectivamente

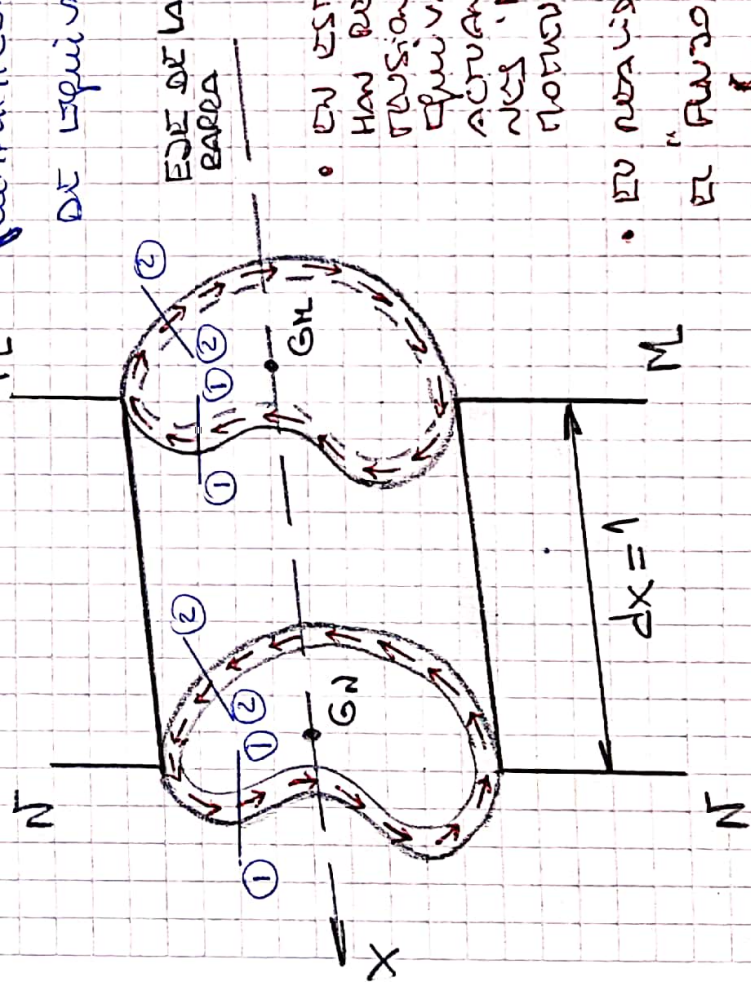
$$M_M + M_N = 0$$

EC. DE EQUILIBIO DE ESFUERZOS INTERNOS.

ESQUEMAS EQUIVALENTES ENTRE

SOLICITACIONES INTERNAS Y TENSIONES

(COMPRESION DE LAS ECS DE EQUIVALENCIA $\rightarrow$ 4º EC)



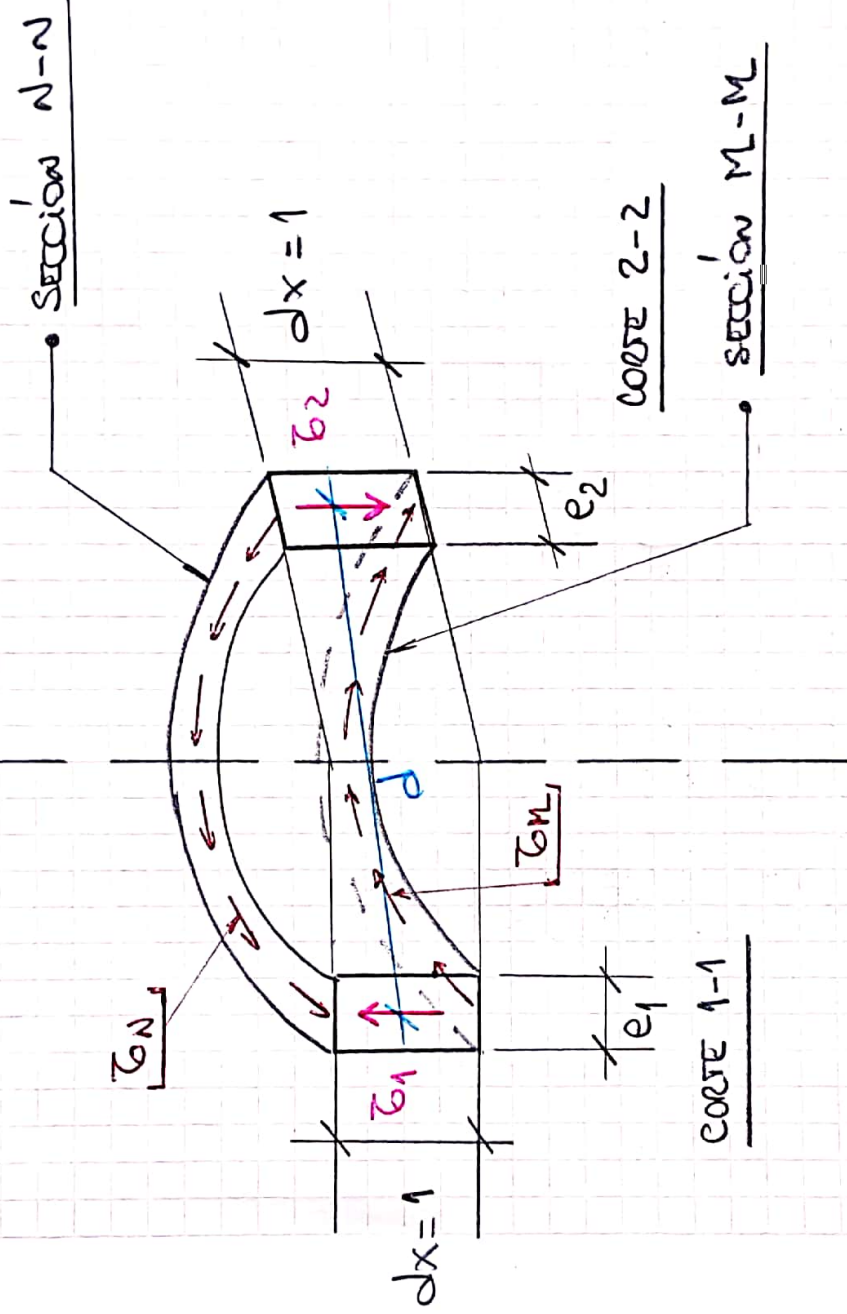
- EN ESTE ESQUEMA SE HAN REPRESENTADO LAS TENSIONES TANGENCIALES EQUIVALENTES A LAS SECCIONES M' y N' A LOS NOMBRES M_M y M_N .

- EN REALIDAD SE REPRESENTA EL "FLUJO DE TENSIONES"

$$q = \tau \cdot b \cdot e$$

es fuerza por unidad de longitud τ es

- Practicare 2 cortes en las secciones 'M-M' y 'N-N' en los lugares '1-1' y '2-2', y realizar la figura para mejor visualización, queda:



2º y 3º LCS de ~~equilibrio~~ equilibrio:

$$0 = \int_s \tau_N(s) \cdot e_N(s) \cdot ds - \int_s \tau_M(s) \cdot e_M(s) \cdot ds$$

Resultante de las τ en el plano yz del plano N por el plano M .

Resultante de las τ en el plano yz del plano N por el plano M .

Se satisface.

$$F_{yz}^N - F_{yz}^M = 0.$$

1º EC. DE EQUILIBRIO:

$$\Sigma F_x = 0$$

FUERZAS INTERNAS

$$\underbrace{N_N + N_H}_{=0} = 0.$$

$$G_1 \cdot e_1 \cdot 1 - G_2 \cdot e_2 \cdot 1 = V_1 - V_2 = 0.$$

• SE SATISFACE.

4º EC. DE EQUILIBRIO:

- SE TOMA MOMENTOS RESPECTO DE CUALQUIER PUNTO DEL PLANO DE LA SECCIÓN 'N' DE LAS T_{01} .
- IDEM PERO RESPECTO DEL PLANO DE LA SECCIÓN 'H' DE LAS T_{01} . DE TAL MANERA QUE AMBOS PUNTOS ESTÁN ALINEADOS EN UNA MISMA PARALELA AL EJE DE LA CARRERA.

$$M_{Lx}^N - M_{Lx}^M = 0 = \int_S T_{01}(s) \cdot e_1(s) \cdot r \cdot ds - \int_S T_{01}(s) \cdot e_H(s) \cdot r \cdot ds$$

• SE SATISFACE.

S² y G² EC-DE EQUILIBRIO: → VERAN NOTANDO CONTORNOS

en el plano 'yz':

$$M_{yz} = 0 = \int_S \sigma_{xz} \cdot e_1(s) \cdot 1 \cdot ds - \sigma_{yz} \cdot e_1 \cdot 1 \cdot d$$

$$F_{yz}^N \cdot 1$$

$$V_1 \cdot d$$

||

$$F_{yz}^M \cdot 1$$

||

$$V_2 \cdot d$$

$$\int_S \sigma_{xz} \cdot e_1(s) \cdot 1 \cdot ds \quad \sigma_{yz} \cdot e_2 \cdot 1 \cdot d$$

→ RESUMEN:

• SE VAN PLANTANDO 4 TIPOS DE EQUILIBRIO:

↳ I) EQUILIBRIO DE FAS EXTERIORES PARA LA TOTALIDAD DE LA ESTRUCTURA, CON M_x^A Y M_x^B ;

↳ II) EQUILIBRIO DE FAS INTERNAS PARA LA LONGITUD 'dx' CON M_M Y M_N ;

↳ III) EQUILIBRIO DE LAS FUERZAS EQUIVALENTES DE LOS NOTORIOS M_M Y M_N ORIGINALES POR LAS RESISTENCIAS $\sigma_{xz}(s)$ Y $\sigma_{yz}(s)$;

↳ IV) EQUILIBRIO DE LAS FUERZAS EQUIVALENTES POR LOS CORRES $M-d-1$ Y 2 .

TORSIÓN EN BARRAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL NO CIRCULAR

01 – INTRODUCCIÓN:

La determinación de las variables, tensiones y desplazamientos y deformaciones, en este tipo de barras con secciones no circulares es un problema “bastante” más complejo que los vistos hasta ahora;

No puede ser estudiado en la forma y metodología que hemos venido estudiando: SA. SF y ST en secciones circulares;

Repasando esta metodología, la misma era la siguiente:

- I. Se realizaba un ensayo del elemento y de la sollicitación a ser estudiado;
- II. Se observaba cómo era la deformación y se sacaban conclusiones de la misma, las cuales se transformaban en Hipótesis de Trabajo;
- III. De las conclusiones se observaban cómo era la variabilidad de las deformaciones;
- IV. Luego, mediante la Ley de Hooke, se relacionaban con las tensiones;
- V. Se utilizaban las Ecs de Equivalencia para poder establecer las relaciones entre Tensiones y Esfuerzos Internos.

Estos problemas son abordados por la “Teoría Matemática de la Elasticidad” y por Teorías “Ad-Hoc”.

Estas teorías escapan o se encuentran fuera del alcance de nuestra asignatura. Por lo tanto, no serán estudiadas.

Solamente se verán las conclusiones de dichos estudios y algunos aspectos considerados como “importantes” e “imprescindibles” para el entendimiento del comportamiento.

Acá, de un ensayo se observa que:

- i.- Las secciones NO se mantienen planas después de la deformación por torsión, por lo tanto, se alabea;
- ii.- Las secciones NO mantienen su forma;

TEORÍA DE SAINT-VENANT:

- SECCIONES NO CIRCULARES.
- BASTANTE MÁS COMPLEJO.

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} SA \\ SF \\ ST \end{array} \right\} \quad (CONCEPTOS, RESULTADOS)$$

$$SA \rightarrow \sigma_x(x) = \frac{\sigma(x)}{A(x)}$$

$$SF \rightarrow \sigma_x(x) = \frac{M_y(x)}{I_y} \cdot z$$

$$ST \rightarrow \tau_{xy}(x,y) = \frac{M_y(x)}{I_p} \cdot r$$

RESOLUCIÓN:

→ I) TEORÍA DE ELASTICIDAD.

→ II) TEORÍAS "AD HOC"

DE UN PUNTO DE VISTA:

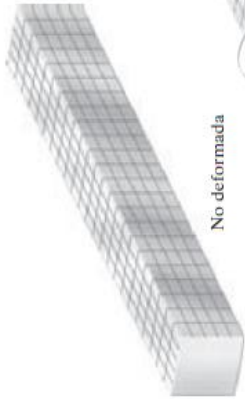
I) LAS SECCIONES NO SE MANTIENEN PLANAS →

→ SE ALABEZAN.

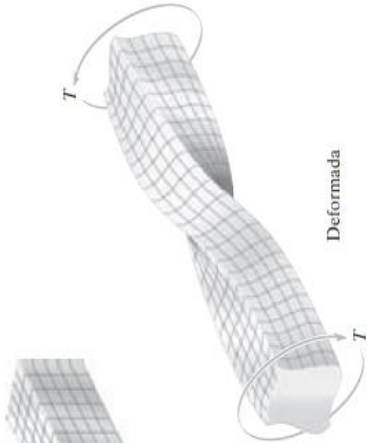
II) LAS SECCIONES NO MANTIENEN su FORMA.

02 – CONSIDERACIONES – PARTICULARIDADES – OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES DE LOS ESTUDIOS:

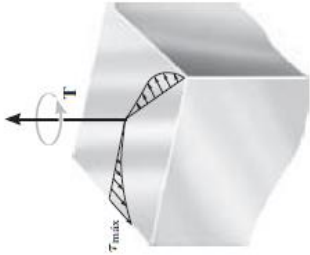
- I.- Deberá estudiarse y cuantificarse no sólo los giros relativos entre las secciones, sino también, las distorsiones locales para cada sección. Precisamente, las distorsiones locales caracterizan el alabeo. De esta última consideración se desprende que también deberá estudiarse el alabeo relativo entre las secciones;
- II.- En barras de secciones cuadradas, las secciones que giran 90° ó 180° suelen mantener su forma;
- III.- En consonancia con la precisión anterior, se observa que para el resto de las secciones, se podrá presentar que algunas líneas se mantengan rectas después de la deformación por torsión;
- IV.- Para el resto de las líneas que pueden trazarse en cualquier sección, las mismas se terminan curvando cuando la barra se deforma;
- V.- Las distorsiones no tienen una relación lineal entre ellas, y por consiguiente, si es aplicable la “Ley de Hooke”, lo que es lo mismo que decir que el material se encuentra trabajando dentro del período elástico, las tensiones tampoco poseen una relación lineal entre ellas;
- VI.- Para una sección transversal de una barra cuadrada o rectangular, es un error considerar que las tensiones tangenciales variarán en forma lineal con su distancia al eje de la misma;
- VII.- Las tensiones tangenciales no van a depender de un solo parámetro (r : radio, por ejemplo); sino que van a depender de las 2 coordenadas de un punto de la sección (y_P ; z_P);
- VIII.- Las tensiones en el contorno de una sección cualquiera van a tener la dirección de la tangente a la misma;
- IX.- En las secciones transversales cuadradas o rectangulares, en los vértices de las mismas las tensiones tangenciales son nulas.



No deformada



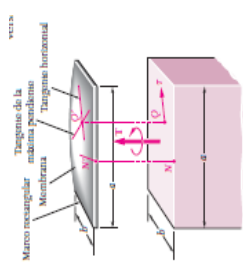
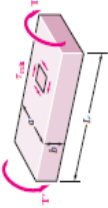
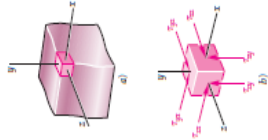
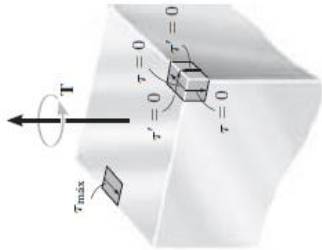
Deformada



Distribución del esfuerzo cortante a lo largo de dos líneas radiales



Alabeo del área de la sección transversal

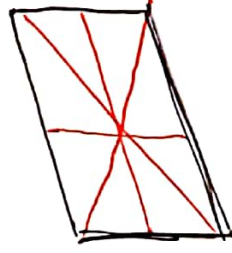


6/10

ALGUNAS PARTICULARIDADES:

I) SE DEBEÑAN ESTUDIAR: GIROS RELATIVOS Y DISTORSIONES LOCALES.

II) SE PRESENTAN LÍNEAS QUE SE MANTIENEN RECTAS.



III) EL RESO DE LAS LÍNEAS SE TERMINA CUANDO LA BARRA SE DEFORMA.

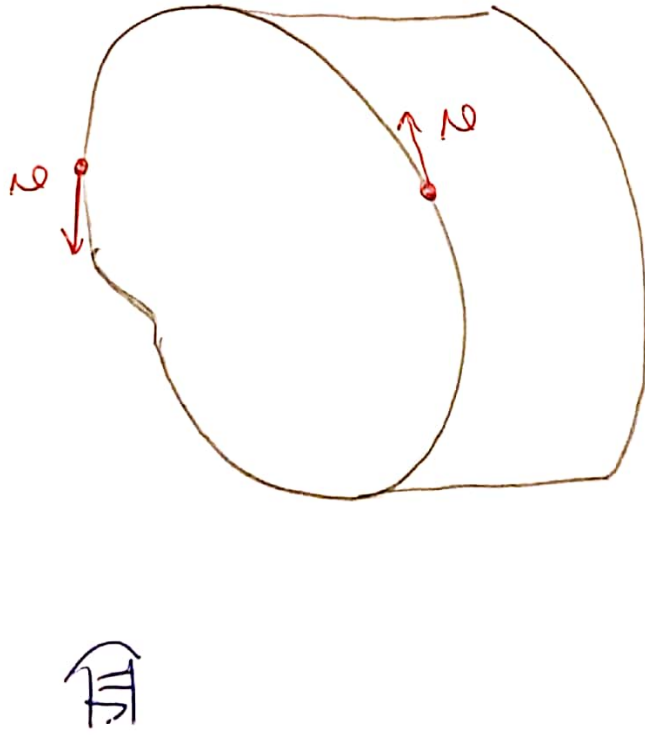
IV) LAS DISTORSIONES NO TIENEN UNA RELACIÓN LINEAL

NO SE CUMPLE

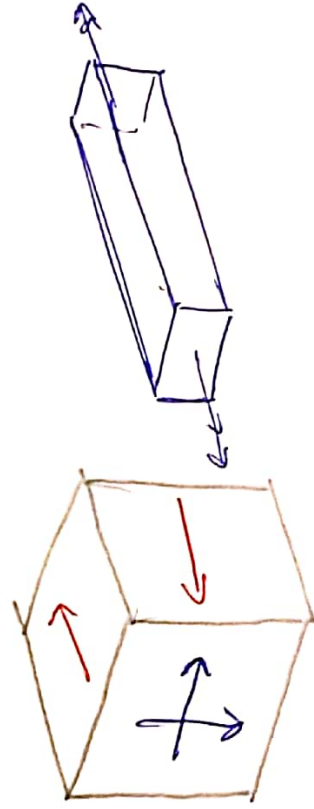
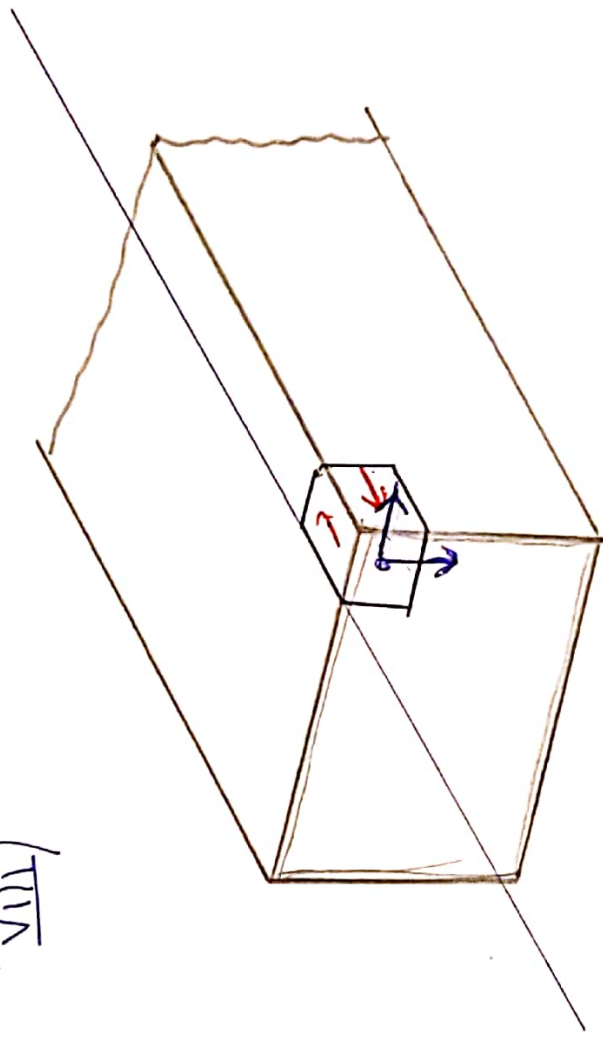
$$\gamma = \gamma_{\max} \cdot \frac{r}{R} \rightarrow \tau = \tau_{\max} \cdot \frac{r}{R}$$

II) LAS ' $\vec{e}_i$ ' tampoco varían bivalentemente.

III) LAS ' $\vec{e}_i$ ' no dependen de una sola variable de posición $\rightarrow$ por lo menos de '2'.

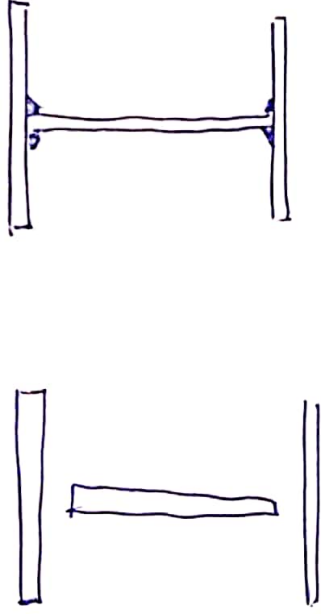
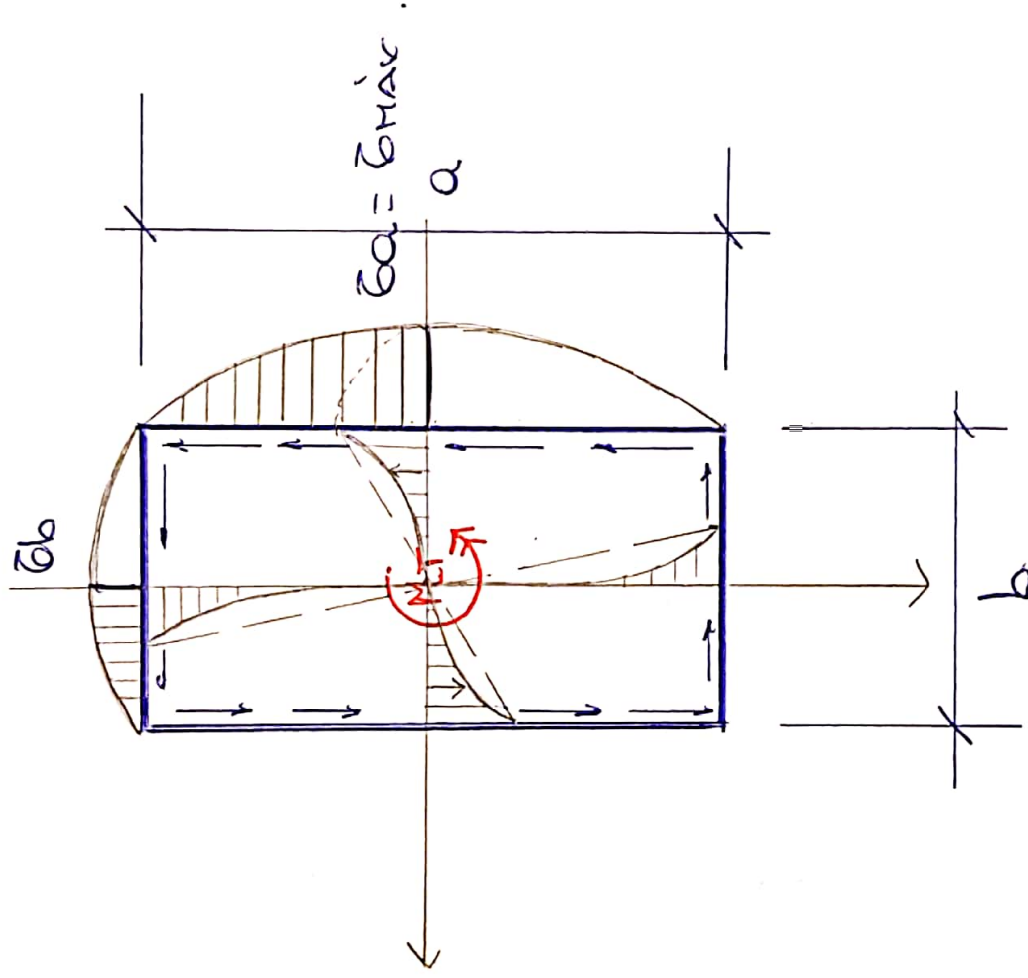


VIII)



$\vec{e}$ tang. al contorno.

SECCIÓN RECTANGULAR:



$$\tau_a = \tau_{max} = \frac{M_T(x)}{\alpha \cdot a \cdot b^2}$$

$$\alpha = f(a/b)$$

$$\tau_b = \eta \cdot \tau_{max} = \eta \cdot \tau_a$$

$$\eta = f(a/b)$$

$$\phi(x) = \frac{M_T(x)}{G \cdot \beta \cdot a \cdot b^3}$$

$$\beta = f(a/b)$$

Tabla 2

a/b	1	1.5	1.75	2	2.5	3	4	6	8	10	∞
α	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333
η	1.000	0.859	0.820	0.795	0.766	0.753	0.745	0.743	0.742	0.742	0.742

9/10

PERFILES ABIERDOS:

$$\frac{a}{b} \rightarrow \infty \rightarrow \alpha \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$\frac{L_i}{t_i} \gg 10 \rightarrow \alpha_i \approx 0,333 = \frac{1}{3}$$

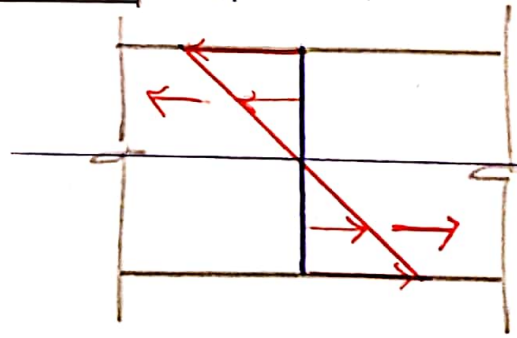
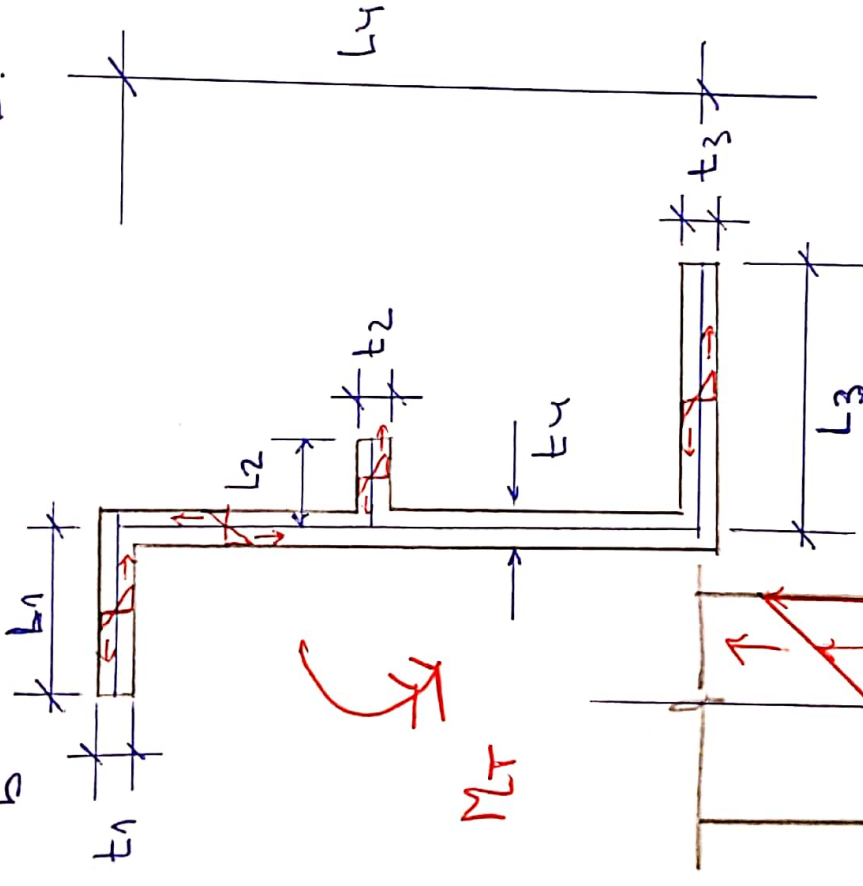
$$C_i = \frac{M_T \cdot t_i}{\sum_{i=1}^n \alpha L_i t_i^3} \cdot t_i$$

$$C_i = \frac{M_T(x)}{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n L_i t_i^3} \cdot t_i$$

$J_T = I_T$: momento de torsión.

$$C_{max} = \frac{M_T(x)}{I_T} \cdot t_{max}$$

$$\phi(x) = \frac{M_T(x)}{G I_T} \cdot L$$



10/10

TEORIA

APUNTA

CON LOS

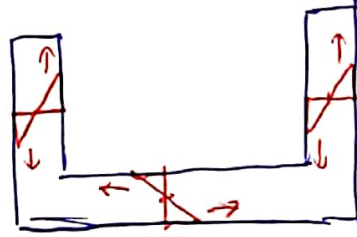
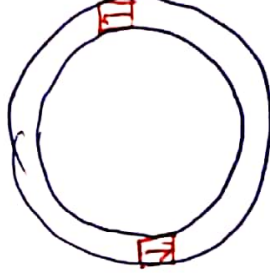
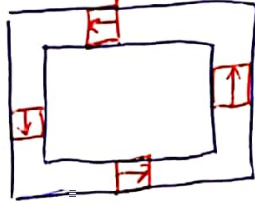
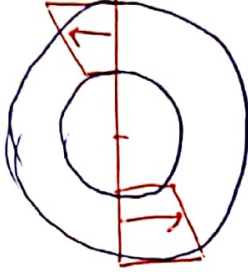
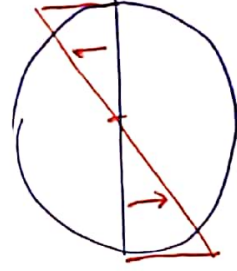
CONCLUSIONES
MUESTRA
7
MAYOR

BUTY

TURNUROS DE
E PEGUENS

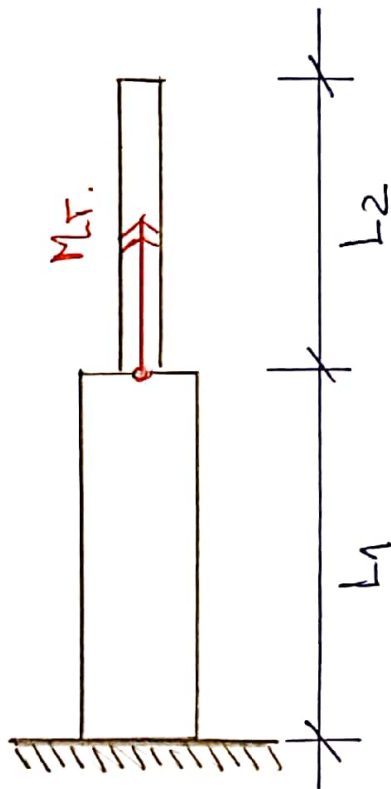
Saint Jean

CONSEJOS
RECEPCIÓN
ASIENTOS.

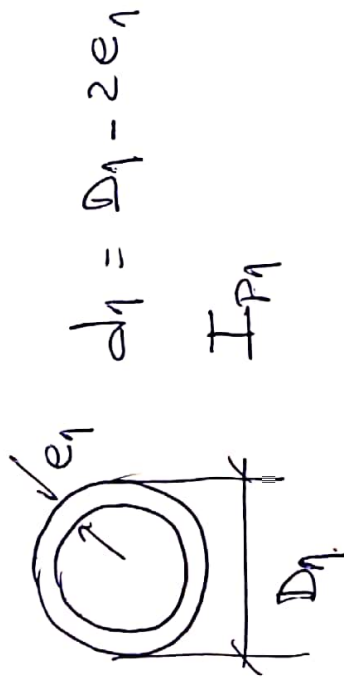


SOLICITACION POR TORSION:

	SA	ST
MAGNITUDES ESCALARES	$N(x)$	$M_T(x) = M_L(x)$
	$\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$	$\tau(x, r) = \frac{M_T(x) \cdot r}{I_P}$
	$\delta(x) = \Delta L(x) = \int \frac{N(x)}{EA(x)} dx$	$\phi(x) = \int \frac{M_T(x)}{GI_P} dx$
MAGNITUDES CINETICAS	$\epsilon_x(x) = \frac{d\delta(x)}{dx}$	$\kappa(x) = \Theta(x) = \frac{d\phi(x)}{dx}$
		$\gamma = \gamma_{max} \cdot \frac{r}{R}$



① D_1, e_1, G_1

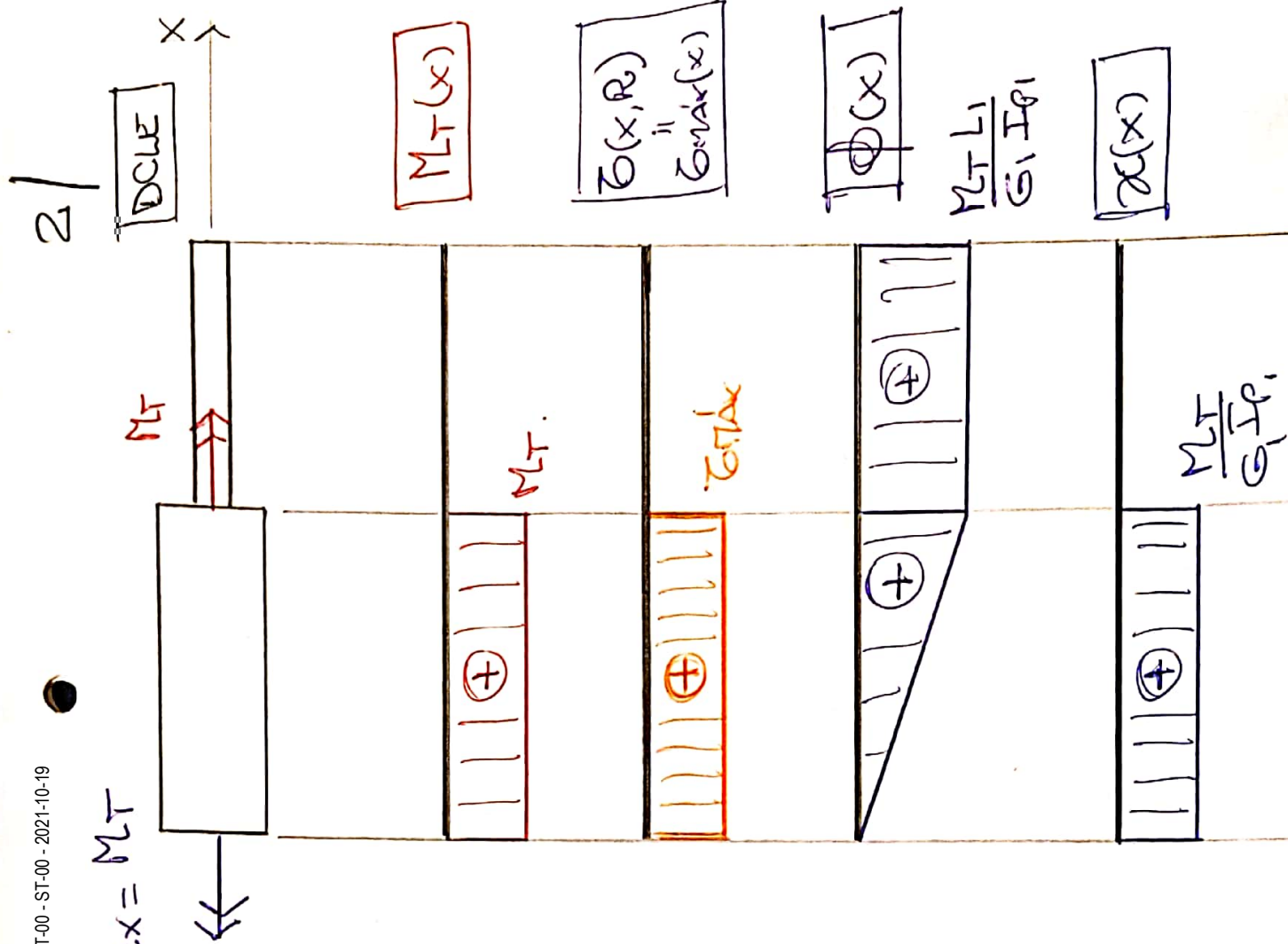


$d_1 = D_1 - 2e_1$

② D_2, e_2, G_2, I_{P2}

$I_P = \frac{\pi}{32} \cdot [D^4 - d^4]$

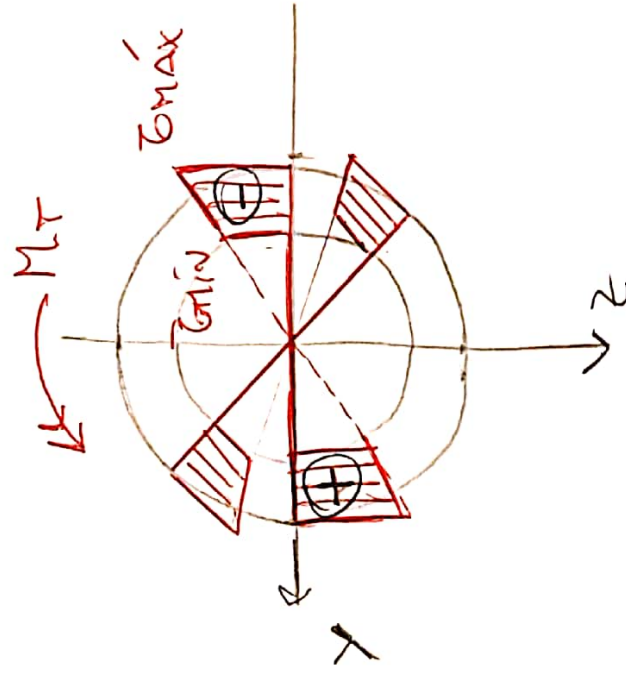
$M_{ex} = M_T$



$$\tau(x, r) = \frac{M_T(x)}{I_P} \cdot r$$

$$\tau(x, R) = \tau_{\max}(x) = \frac{M_T(x)}{I_P} \cdot R$$

$$M_T(x) = \infty \quad R_1 = \infty \quad I_{P1} = \infty$$



$$\phi(x) = \int \frac{M_T(x)}{G I_P} \cdot dx$$

$$0 \leq x \leq L_1$$

$$\phi_1(x) = \frac{M_{T1}}{G I_{P1}} \cdot x \rightarrow \text{Ley de variación lineal}$$

$$\phi_1(x=0) = 0$$

$$\phi_1'(x=L_1) = \frac{M_{T1} L_1}{G I_{P1}}$$

$$L_1 \leq x \leq L_1 + L_2$$

$$\phi_2(x) = \frac{M_{T1} L_1}{G I_{P1}} + \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{M_{T2}(x)}{G I_{P2}} \cdot dx$$

$$\phi_2(x) = \frac{M_{T1} L_1}{G I_{P1}} + 0$$

$$x = L_1 \quad x = L_1 + L_2$$

4)

$$0 \leq x \leq L_1$$

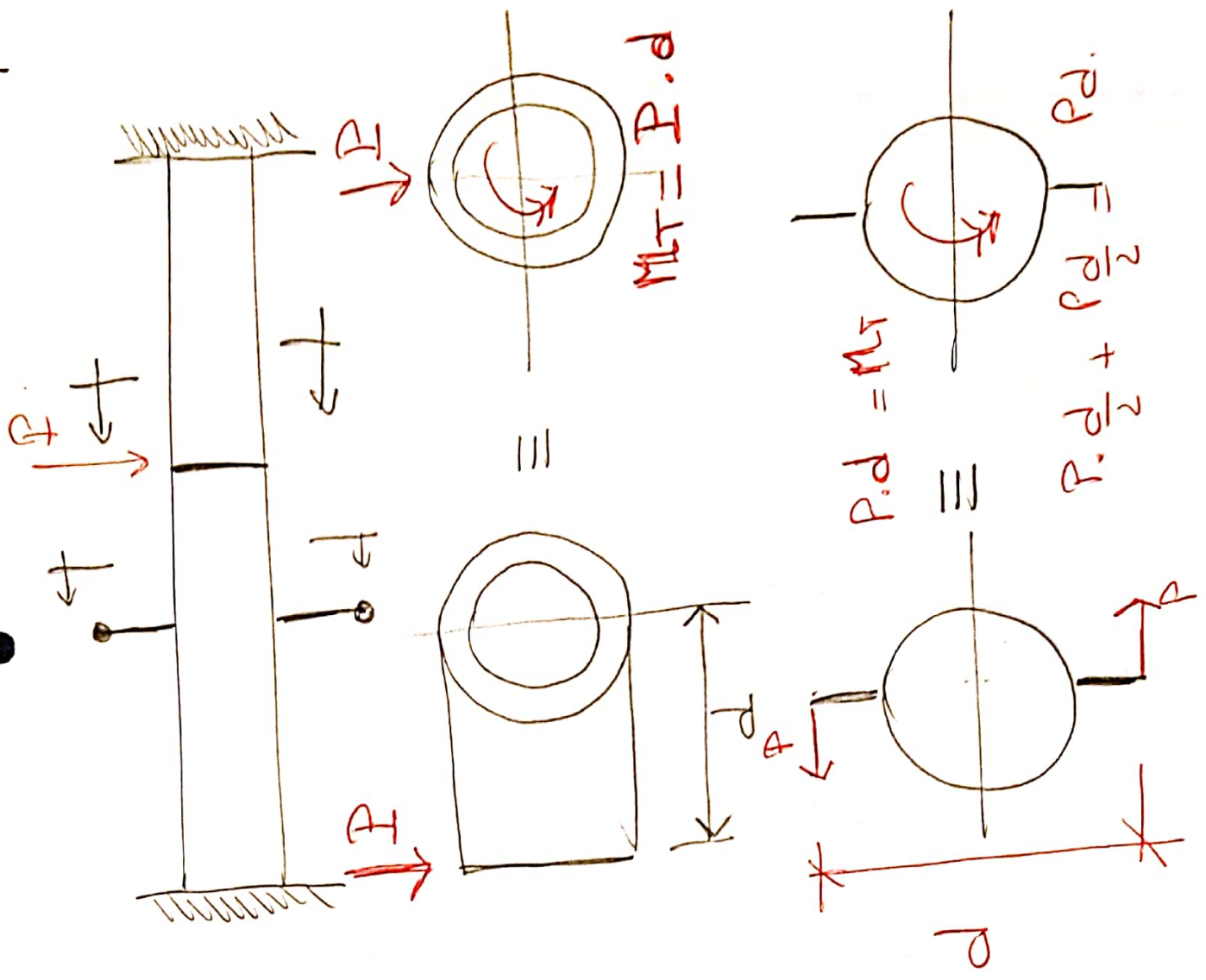
$$\phi_1(x) = \frac{M_{T1}}{G I_{P1}} \cdot x$$

$$\chi_1'(x) = \frac{d\phi_1(x)}{dx} = \frac{M_{T1}}{G I_{P1}}$$

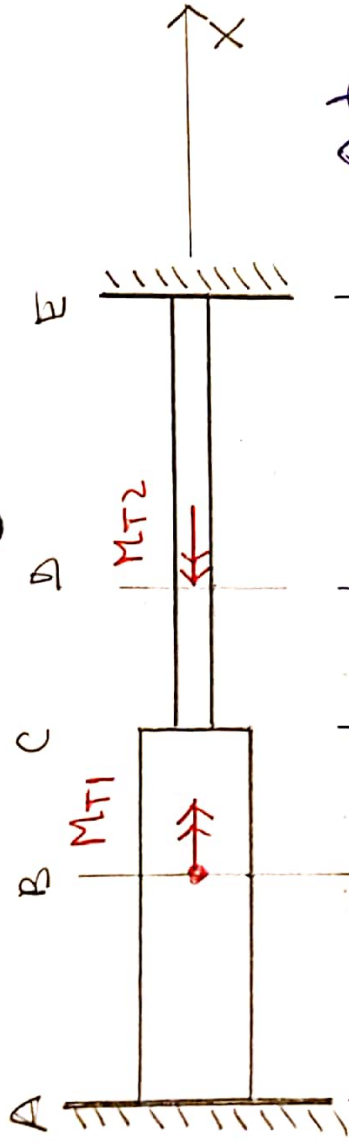
$$L_1 \leq x \leq L_1 + L_2$$

$$\phi_2(x) = \frac{M_{T1} L_1}{G I_{P1}}$$

$$\chi_2'(x) = \frac{d\phi_2(x)}{dx} = 0$$



5/



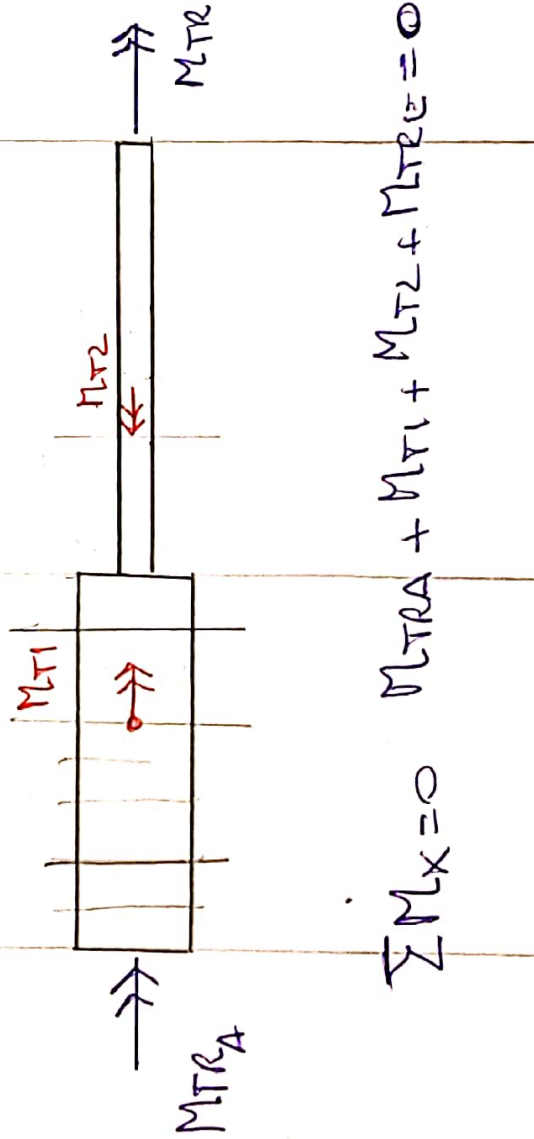
$$\Delta\phi_{EA} = \Delta\phi_{ED} + \Delta\phi_{DC} + \Delta\phi_{CB} + \Delta\phi_{BA} =$$

$$= (\phi_E - \phi_A) + (\phi_D - \phi_C) + (\phi_C - \phi_B) + (\phi_B - \phi_A)$$

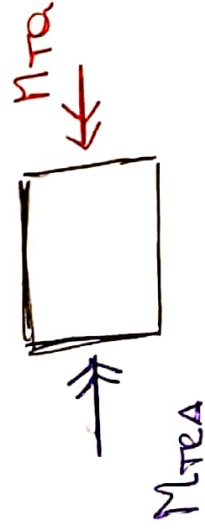
$$\Delta\phi_{BA} = \phi_B - \phi_A = \phi_B =$$

$$= \int_0^a \frac{M_{TE}(x)}{G_1 I_{P1}} \cdot dx = \frac{M_{TE} \cdot a}{G_1 I_{P1}} =$$

$$= -\frac{M_{TE} \cdot a}{G_1 I_{P1}}$$



$$\sum M_x = 0 \quad M_{TEA} + M_{TD1} + M_{TD2} + M_{TEB} = 0$$

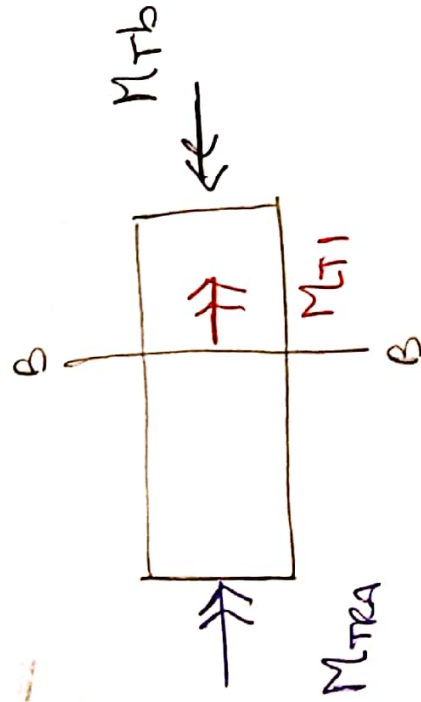


$$\Delta\phi_{CB} = \phi_C - \phi_B.$$

$$\phi_B = - \frac{M_{TRA} \cdot a}{G_1 I_{P1}}$$

$$\phi_C = \phi_B + \left[- \frac{(M_{TRA} + M_{TI}) \cdot b}{G_1 I_{P1}} \right]$$

$$\Delta\phi_{CB} = - \frac{(M_{TRA} + M_{TI}) b}{G_1 I_{P1}}$$



6)

$$\phi_C = \phi_B + \int \frac{M_{TB}(x)}{G_1 I_{P1}} dx.$$

$$= \phi_B + \frac{M_{TB}}{G_1 I_{P1}} \cdot b.$$

$$M_{TB} = - (M_{TRA} + M_{TI}).$$

$$\Delta\phi_{DC} = - \frac{(M_{TRA} + M_{TI}) c}{G_2 I_{P2}}.$$

$$\Delta\phi_{DC} = \phi_D - \phi_C =$$

$$= \left[\cancel{\phi_C} + \int \frac{M_{TC}(x)}{G_2 I_{P2}} \cdot dx \right] - \phi_C = \phi_D$$

$$\Delta\phi_{ED} = \phi_E - \phi_D =$$

$$= - \frac{(M_{TRA} + M_{T1} - M_{T2}) \cdot d}{G_2 I_{P2}} = - \frac{M_{TRA} d}{G_2 I_{P1}} - \frac{M_{T1} d}{G_2 I_{P2}} + \frac{M_{T2} d}{G_2 I_{P2}}$$

$$\Delta\phi_{EA} = - \frac{(M_{TRA} + M_{T1} - M_{T2}) d}{G_2 I_{P2}} - \frac{(M_{TRA} + M_{T1}) c}{G_2 I_{P2}} - \frac{(M_{TRA} + M_{T1}) b}{G_1 I_{P1}} -$$

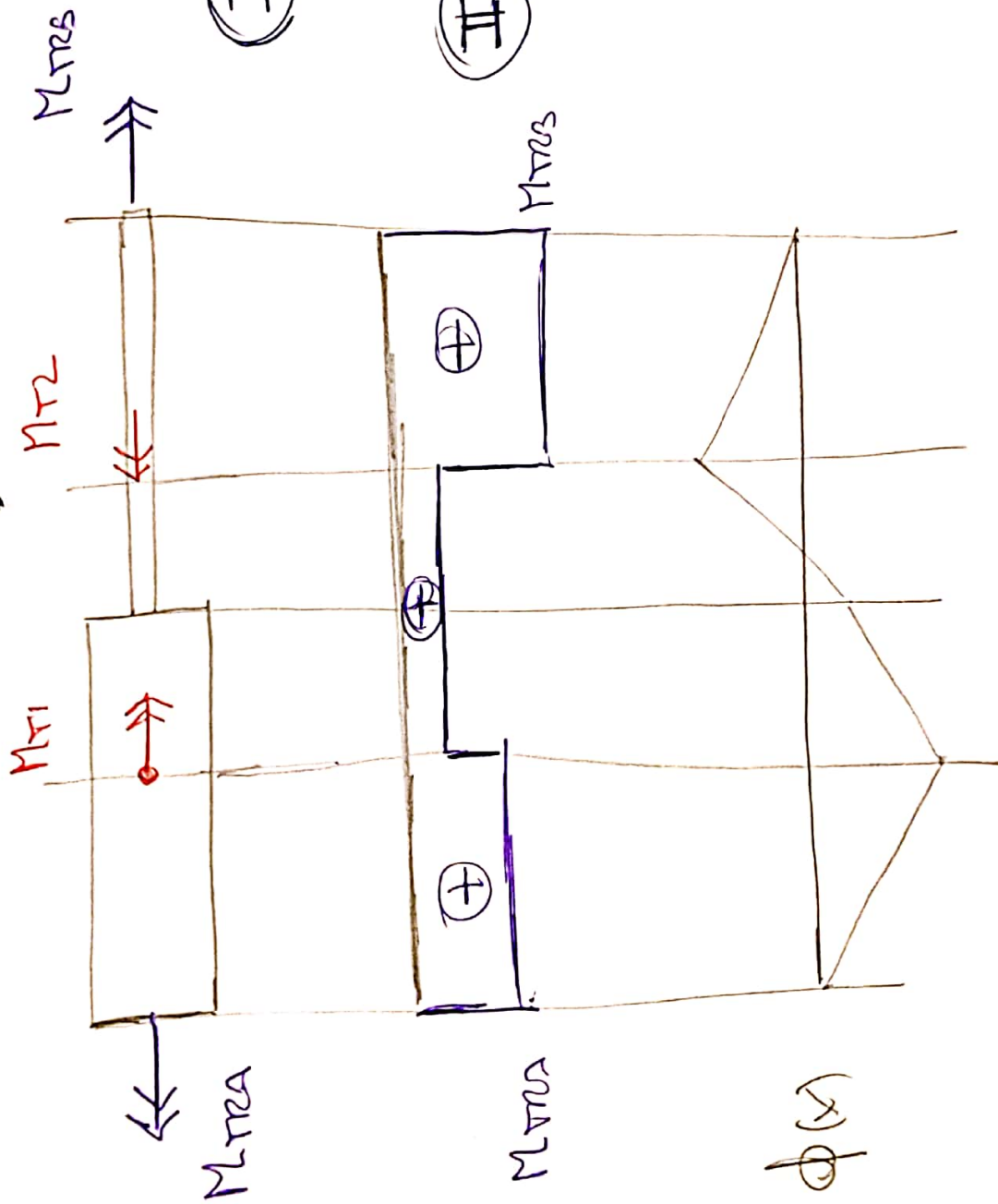
$$- \frac{M_{TRA} a}{G_1 I_{P1}} = 0.$$

$$- M_{TRA} \cdot \left[\frac{d}{G_2 I_{P2}} + \frac{c}{G_2 I_{P2}} + \frac{b}{G_1 I_{P1}} + \frac{a}{G_1 I_{P1}} \right] = M_{T1} \left(\frac{d}{G_2 I_{P2}} + \frac{c}{G_2 I_{P2}} + \frac{b}{G_1 I_{P1}} \right) -$$

$$- \frac{M_{T2} d}{G_2 I_{P2}}.$$

$$\rightarrow M_{TRA}$$

01



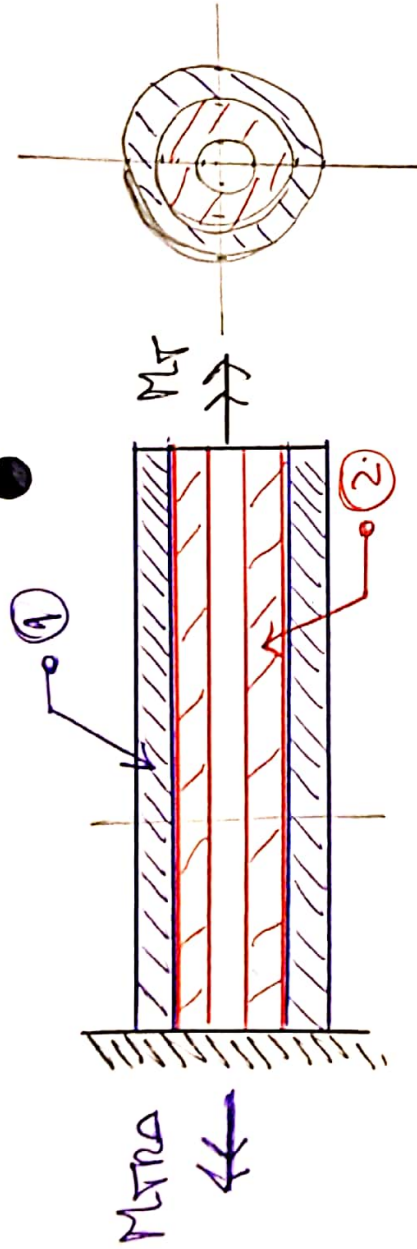
(I) $\chi(x) = \frac{d\phi(x)}{dx}$

(II) $\phi(x) = \int \frac{M_T(x)}{G I_P} dx$

Si $M_T(x) \rightarrow CTE \rightarrow \phi(x) \rightarrow$

$M_T(x) \rightarrow \text{variable} \rightarrow \phi(x) \rightarrow$

9)



$$\phi_1(x) = \phi_2(x)$$

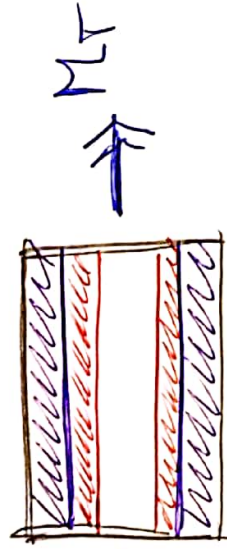
$$S_x = L$$

$$\frac{M_{T1}}{G_1 I_{P1}} = \frac{M_{T2}}{G_2 I_{P2}}$$

$$M_T$$

$$x_1 = x_2$$

$$M_T = M_{T1} + M_{T2}$$



$$M_T(x) \rightarrow \begin{cases} M_T(x)_{total} \\ M_T(x)_1 \\ M_T(x)_2 \end{cases} \quad \phi(x) = \phi(x)_1 = \phi(x)_2$$

$$M_T = M_{T1} + M_{T2}$$

$$\tau(x) \rightarrow \begin{cases} \tau_{x, max, 1} \\ \tau_{x, max, 2} \end{cases} \quad \tau(x) = \tau(x)_1 = \tau(x)_2$$

1/7

TEORÍA

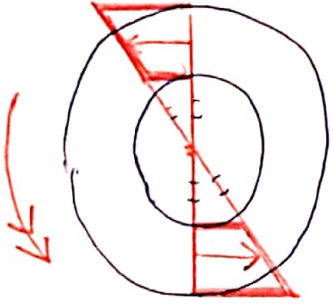
APLICACIÓN.

DISTRIBUCIÓN.

FÓRMULAS.

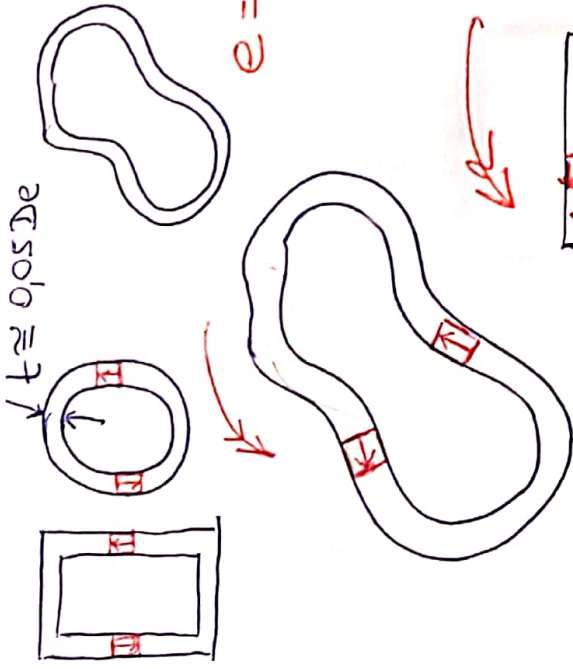
COLUMS

SECCIONES
CIRCULARES.
DE PEQUEÑO O NO
ESPESOR.
(MACIZAS O HUECAS)



BREDT.

SIMPLEMENTE CONEXAS
DE PEQUEÑO
ESPESOR.

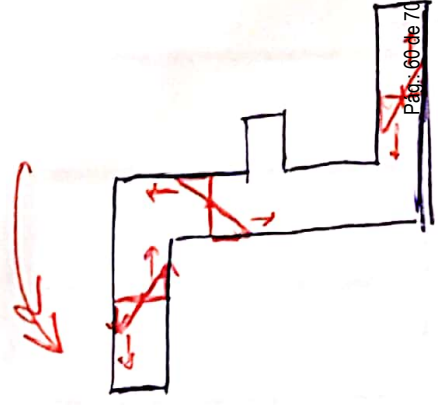


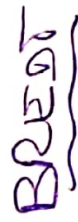
$$e = t = t(s)$$

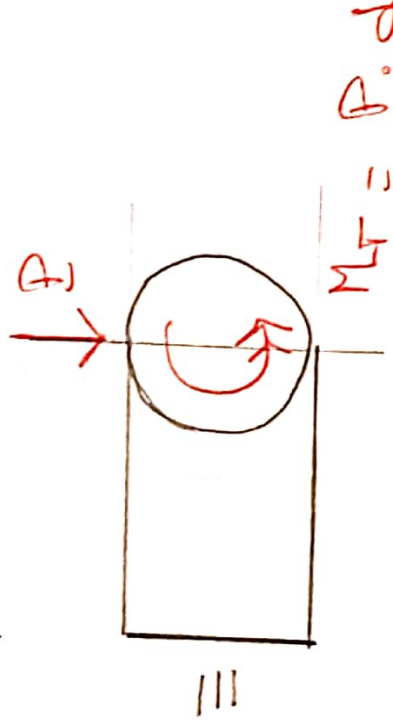
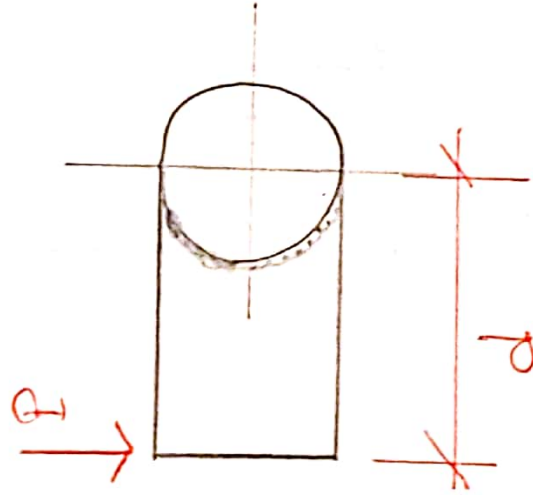
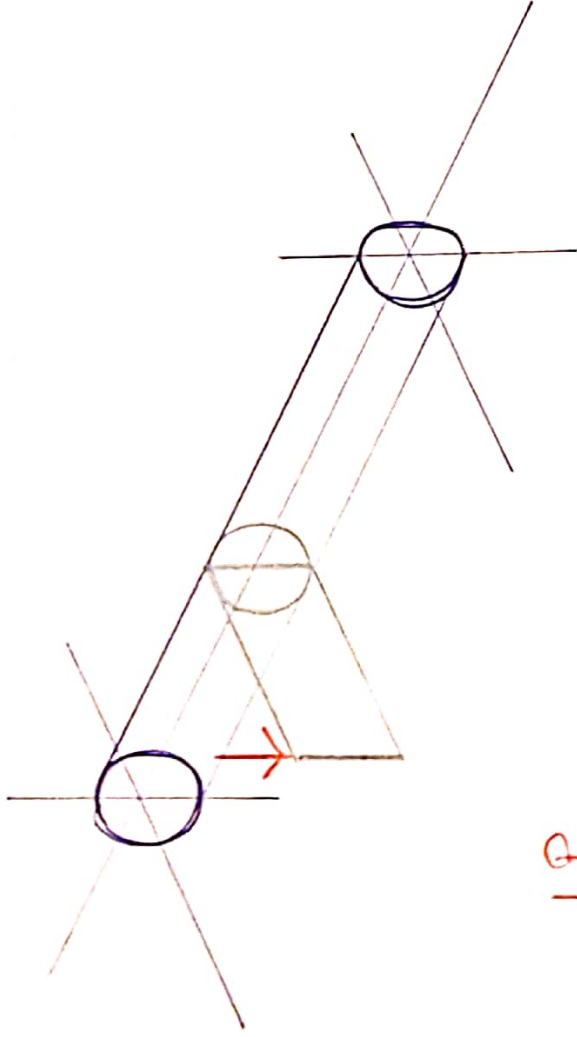
SAINT VENANT

SECCIONES

ABIERTAS







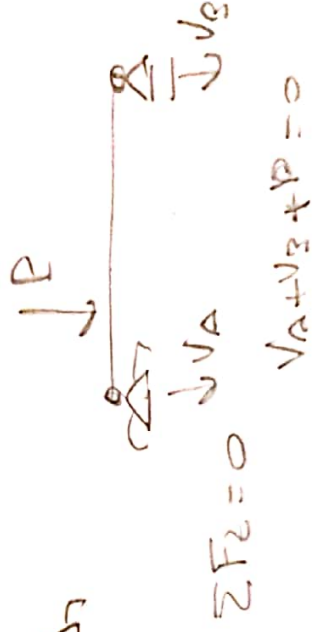
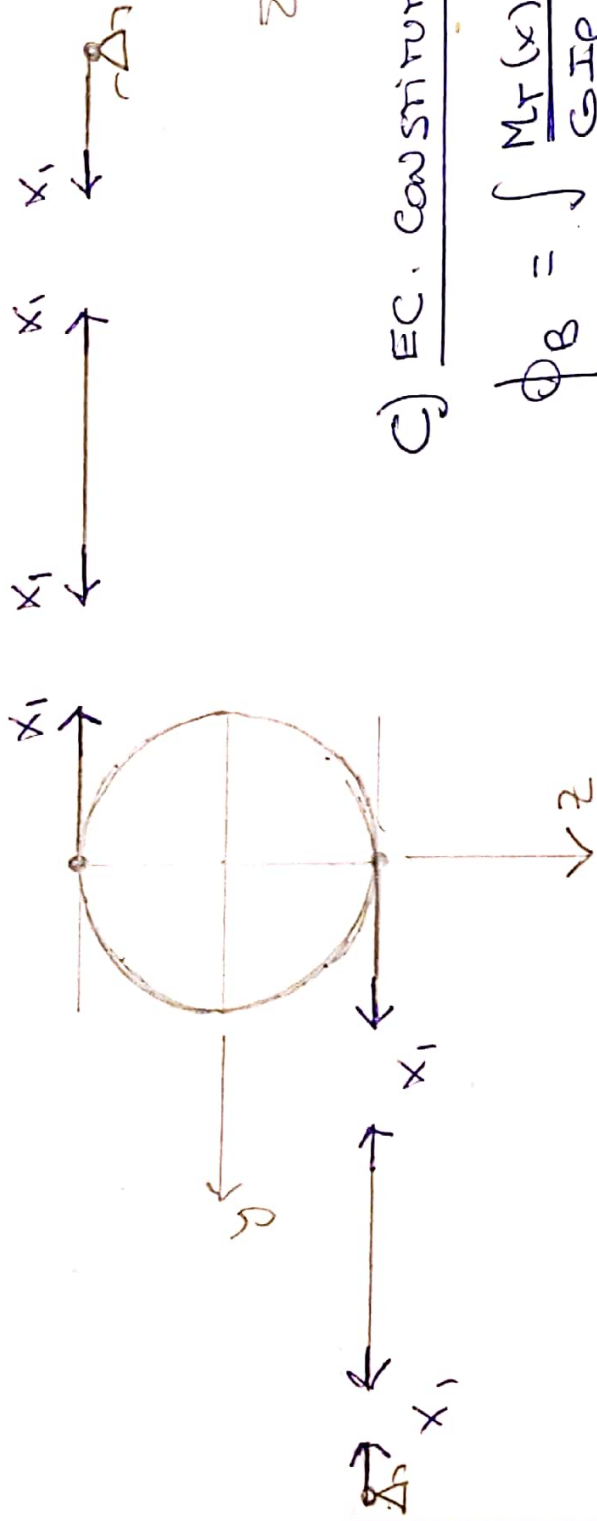


A) ECS. DE COMPATIBILIDAD

Δ_1, Δ_2

$$\frac{\Delta}{2} = \sqrt{\frac{\Delta}{2}}$$

5/7

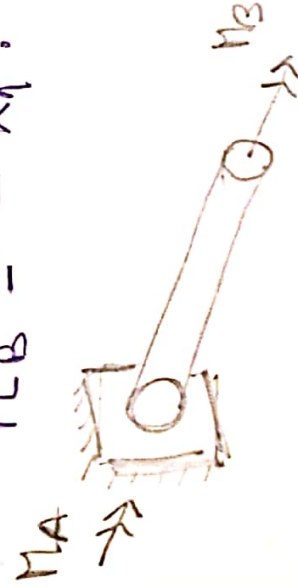


C) EC. CONSTRUTIVA / REL MECÂNICAS

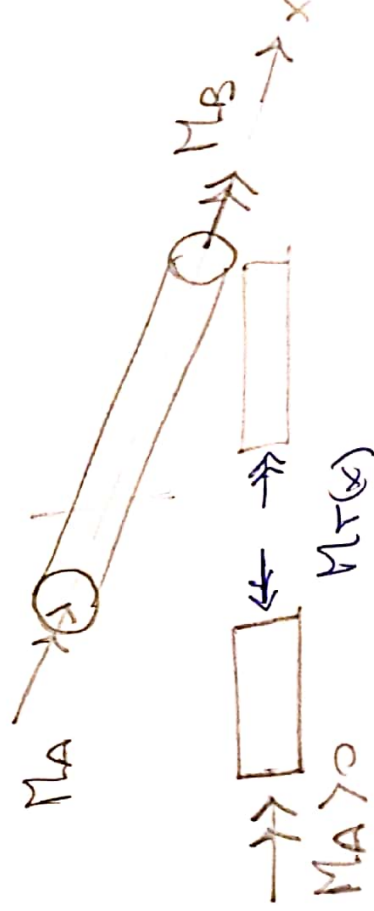
$$\phi_B = \int \frac{M_T(x)}{GIP} \cdot dx = - \frac{M_A L}{GIP} \quad (5)$$

B) ECS. DE EQUILÍBIO:

$$M_B = -x_1 \cdot D_1 \quad (3)$$



$$M_A + M_B = 0 \quad (4)$$



$$M_A + M_T(x) = 0 \rightarrow M_T(x) = -M_A.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \alpha \Delta T_1 L_1 + \frac{x_1 L_1}{E_1 A_1} = \Delta L_1 \\ \textcircled{2} \quad & \Delta L_1 = \phi_B \cdot \frac{D_1}{2} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \alpha \Delta T_1 L_1 + \frac{x_1 L_1}{E_1 A_1} = \phi_B \frac{D_1}{2}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad & M_B = -x_1 D_1 \\ \textcircled{4} \quad & M_A + M_B = 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad M_A - x_1 D_1 = 0 \rightarrow M_A = x_1 D_1$$

$$\textcircled{5} \quad \phi_B = -\frac{M_A L}{G I_P} = -\frac{x_1 D_1 L}{G I_P}$$

$$\alpha \Delta T_1 L_1 + \frac{x_1 L_1}{E_1 A_1} = -\frac{x_1 D_1^2 L}{2 G I_P} \rightarrow x_1 \left[\frac{L_1}{E_1 A_1} + \frac{D_1^2 L}{2 G I_P} \right] = -\alpha \Delta T_1 L_1$$

$$\Delta T_1 > 0 \rightarrow x_1 < 0$$

$$\Delta T_1 < 0 \rightarrow x_1 > 0$$

$$x_1 = -\frac{\alpha \Delta T_1 L_1}{\left[\frac{L_1}{E_1 A_1} + \frac{D_1^2 L}{2 G I_P} \right]}$$

7/7

$$\Delta T_1 > 0 \rightarrow x_1 < 0 \rightarrow \mu_B > 0 \rightarrow \mu_A < 0 \rightarrow \mu_T(x) > 0$$

$$\rightarrow \phi_B > 0$$

$$\Delta L_1, \Delta T = \alpha_1 \Delta T_1 L_1 > 0.$$

$$\Delta L_1 > 0$$

$$\frac{x_1 L_1}{E_1 A_1} = \Delta L_1, x_1 < 0$$

$$x_1 \left[\frac{L_1}{E_1 A_1} + \frac{D_1^2 L_1}{2 G J P} \right] = -\alpha \Delta T_1 L_1$$

$$\frac{x_1 L_1}{E_1 A_1} = -\alpha \Delta T_1 L_1$$

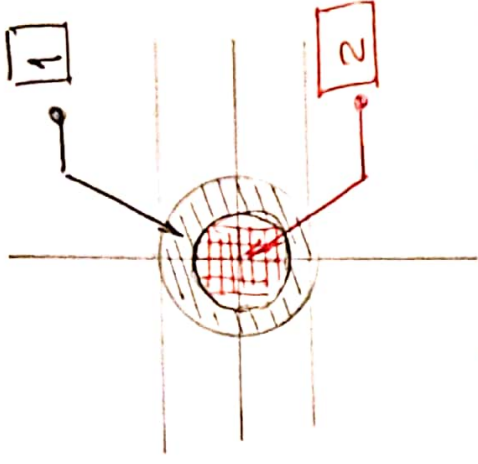
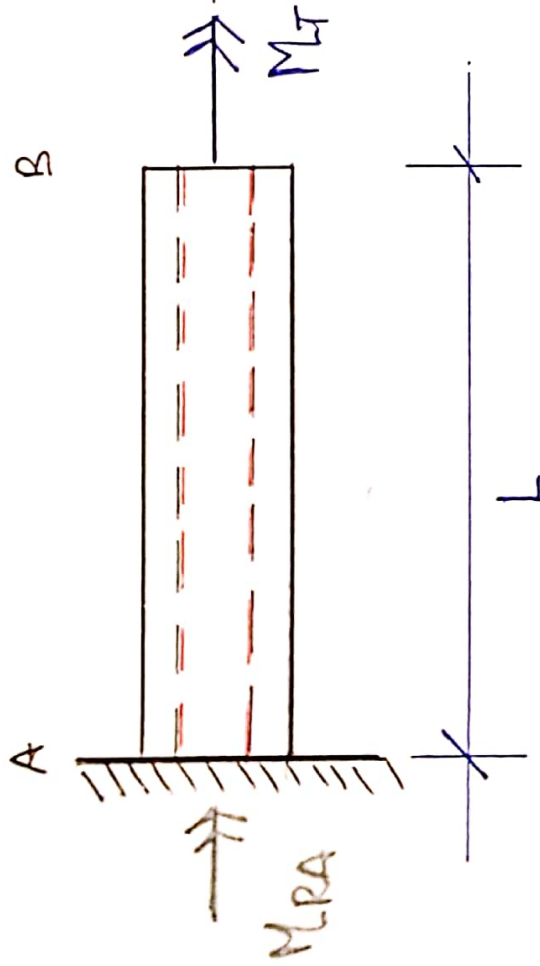
• Si la barra de torsión

• Si la barra de

• Si la barra de

$$x_1' > x_1$$





1) EC. DE EQUILIBRIO

$$\left. \begin{aligned} M_{RA} + M_T &= 0 \\ M_T &= M_{T1} + M_{T2} \end{aligned} \right\}$$

• VINCULADOS SOLIDARIOS

PROBLEMA HIPERESTÁTICO
POR VÍNCULOS INTERNOS

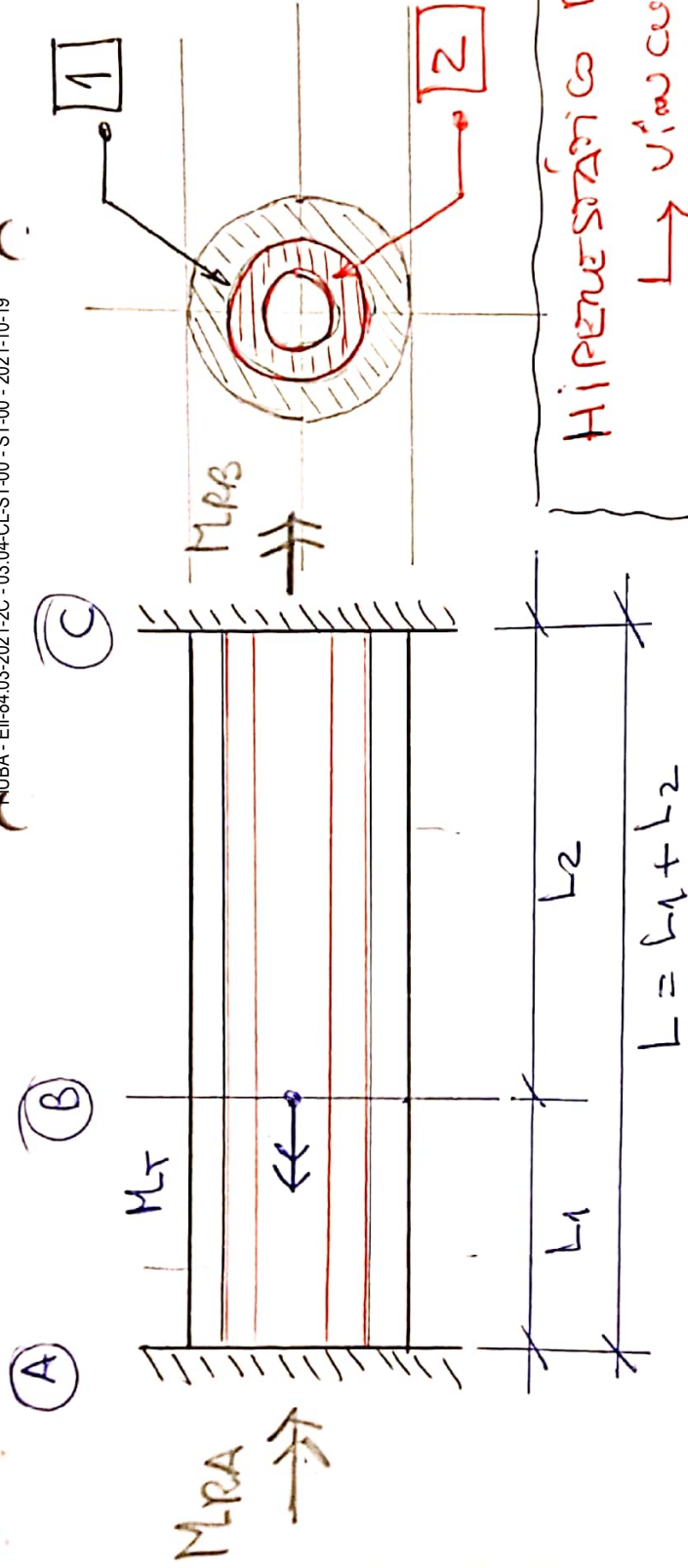
2) EC. DE COMPATIBILIDAD.

$$\phi_1(x) = \phi_2(x).$$

$$\frac{M_{T1} L}{G_1 I_{P1}} = \frac{M_{T2} L}{G_2 I_{P2}}$$

$x=L$

2/4



HIPERESTÁTICO POR:

→ VÍNCULOS EXTERNOS

→ " " INTERNOS

$$GH = GH_{VE} + GH_{VI} = 1 + 1$$

$$GH = 2$$

1) E.C. DE EQUILIBRIO:

$$M_{RA} + M_{RB} - M_T = 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{RA} + M_{T1}^1 + M_{T2}^1 = 0. \\ M_{RB} + M_{T1}^2 + M_{T2}^2 = 0. \end{array} \right.$$

314

2) ECS. DE COMPARTIMENTOS

EC. COMPART. DE CONJUNTO ;

$$\Delta\phi_{CA} = 0. \quad (1a)$$

$$\Delta\phi_{CB} + \Delta\phi_{BA} = 0. \quad (1b)$$

$$\Delta\phi_{BA} = + \frac{M_{T1}(\text{tor}) L_1}{G \cdot I_p}$$

$$M_{T1}(\text{tor}) = - M_{TA}$$

$$\Delta\phi_{BA} = - \frac{M_{TA} L_1}{G \cdot I_p} \quad (2a)$$

$$\Delta\phi_{CB} = + \frac{M_{T2}(\text{tor}) L_2}{G \cdot I_p} = - \frac{(M_{RA} - M_T) L_2}{G \cdot I_p} \quad (2b)$$

$$- \frac{M_{TA} L_1}{G \cdot I_p} - \frac{(M_{TA} - M_T) L_2}{G \cdot I_p} = 0.$$

$$- M_{TA} L_1 - M_{TA} L_2 + M_T L_2 = 0.$$

$$\boxed{\frac{M_T L_2}{L_1 + L_2} = M_{TA}}$$

$M_{TA} \rightarrow \text{cabeceo } M_{R2}$

• EC - DE COMPAT. DE TAYLOR

$$\Delta\phi_{BA} = \phi_B - \underbrace{\phi_A}_{=0} = \phi_B$$

$$\phi_B = \frac{M_{T1} L_1}{G_1 I_{P1}} = \frac{M_{T2} L_1}{G_2 I_{P2}}$$

$$M_{T1} = M_{T1} + M_{T2}$$

$$M_{T2} = \frac{G_2 I_{P2}}{G_1 I_{P1}} \cdot \frac{L_1}{L_2} M_{T1}$$

$$M_T = M_{T1} + \frac{G_2 I_{P2}}{G_1 I_{P1}} M_{T1}$$

$$M_T = \frac{(G_1 I_{P1} + G_2 I_{P2}) M_{T1}}{G_1 I_{P1}}$$

$$\frac{M_T}{G_1 I_{P1} + G_2 I_{P2}} = \frac{M_{T1}}{G_1 I_{P1}}$$

$$M_{T1} = \frac{G_1 I_{P1}}{G_1 I_{P1} + G_2 I_{P2}} M_T$$

$$M_{T2} = \frac{G_2 I_{P2}}{G_1 I_{P1} + G_2 I_{P2}} M_T$$

$$\sum_{i=1}^n G_i I_{Pi}$$

