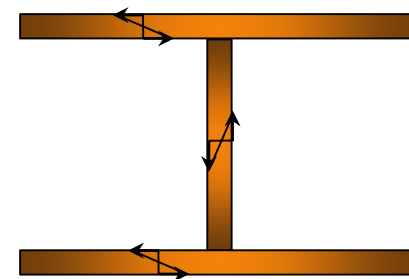
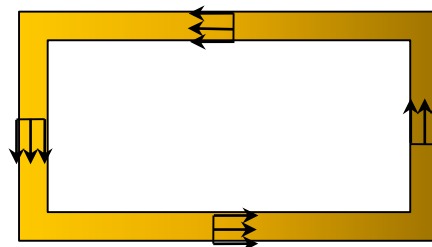
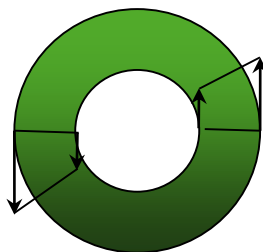
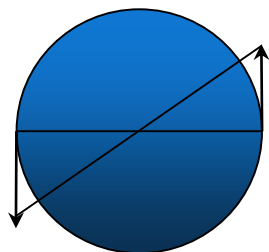


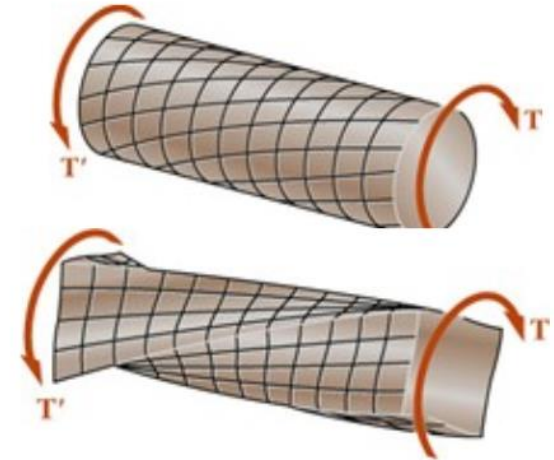
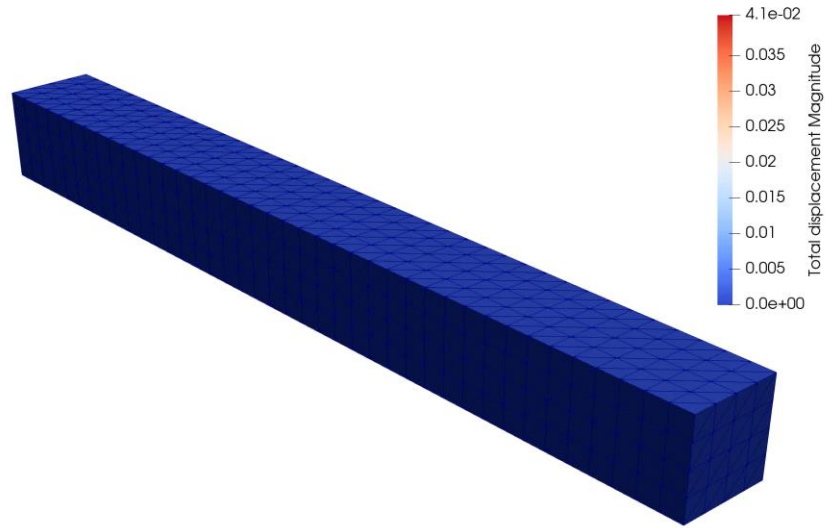


Solicitud por Torsión en Régimen Elástico



Constanza Ruffinelli – Tania Poletilo – Manuela Medina

Repaso clase teórica

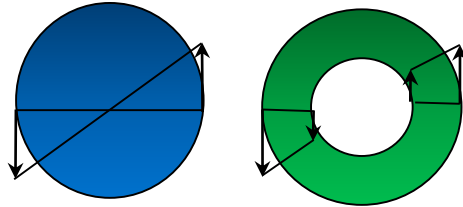


Repaso clase teórica



Coulomb

Secciones circulares:
macizas o huecas



$$\tau = \frac{M_t}{J_p} \cdot r$$

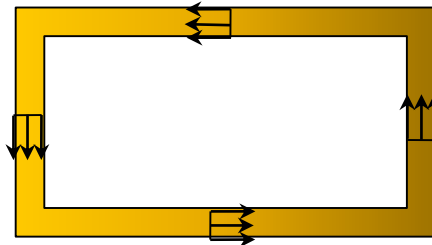
$$\chi = \frac{M_t}{J_p \cdot G}$$

$$J_p^{Cir} = \frac{\pi}{32} \cdot D^4$$

$$J_p^{An} = \frac{\pi}{32} \cdot (D_e^4 - D_i^4)$$

Bredt

Secciones cerradas
de pequeño espesor



$$\tau = \frac{M_t}{2 \cdot \Omega \cdot e}$$

$$\chi = \frac{M_t}{J_t \cdot G}$$

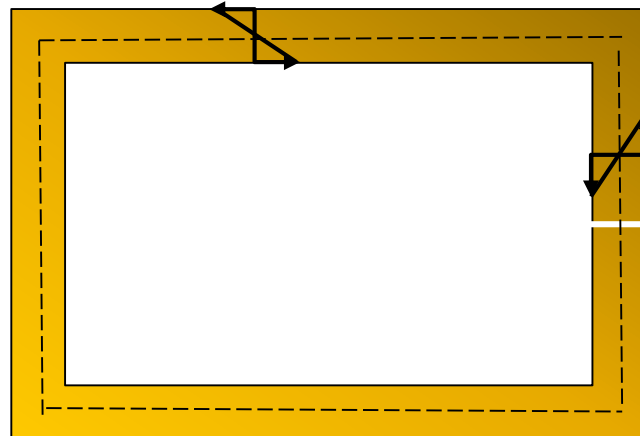
$$J_t = \frac{4 \cdot \Omega^2}{\int \frac{dl}{e}}$$

Ω es el área encerrada por la línea media



¡Observación!

Es importante notar que la sección debe ser completamente cerrada para poder usar Bredt. Si tuviese un corte infinitesimal en la sección tendría que usar Saint Venant

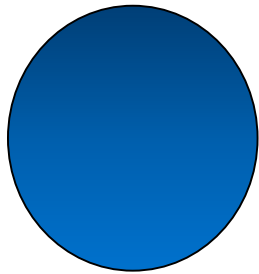




Ejercicio 1: Para cada una de las secciones calcular τ y χ .
¿Con cuál tendrá mayores tensiones y deformaciones?
¿Por que? (Tener en cuenta que todas las áreas son iguales)

$$M_t = 1 \text{ kN m} \quad G = 80 \text{ GPa} \quad A \cong 33,18 \text{ cm}^2$$

1.

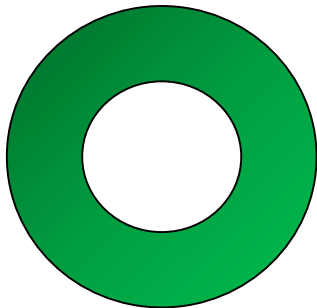


$$D_M = 6,5 \text{ cm}^2$$

3. Tubo (200x100x6)mm



2.



$$D_e = 18,5 \text{ cm}^2$$

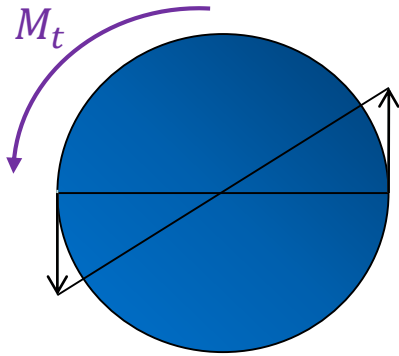
$$e = 6 \text{ mm}$$

$$D_i = D_e - 2 \cdot e = 17,3 \text{ cm}^2$$



Resolución:

1. Circular maciza (Coulomb):

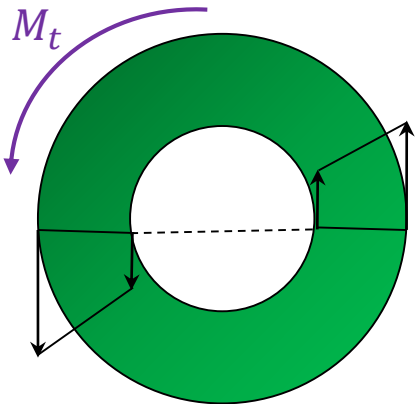


$$J_p = \frac{\pi}{32} \cdot D^4 \quad \Rightarrow \quad J_p = \frac{\pi}{32} \cdot (6,5 \text{ cm})^4 = 175 \text{ cm}^4$$

$$\tau = \frac{M_t}{J_p} \cdot r \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1 \text{ kN m}}{175 \text{ cm}^4} \cdot \frac{6,5 \text{ cm}^2}{2} = 18,54 \text{ MPa}$$

$$\chi = \frac{M_t}{J_p \cdot G} \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{1 \text{ kN m}}{175 \text{ cm}^4 \cdot 80 \text{ GPa}} = 7,14 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{cm}}$$

2. Anular (Coulomb):



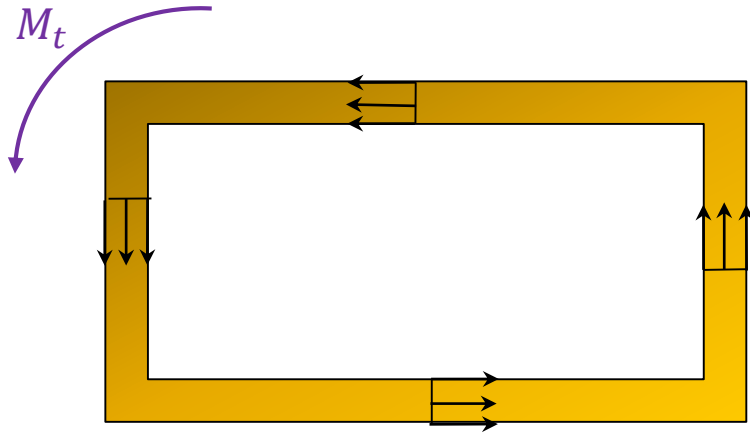
$$J_p = J_p \cdot \frac{\pi}{32} \cdot (D_e^4 - D_i^4) \quad \Rightarrow \quad J_p = \frac{\pi \cdot [(18,5 \text{ cm})^4 - (17,3 \text{ cm})^4]}{32} = 2706 \text{ cm}^4$$

$$\tau = \frac{M_t}{J_p} \cdot r \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1 \text{ kN m}}{2706 \text{ cm}^4} \cdot \frac{18,5 \text{ cm}^2}{2} = 3,42 \text{ MPa}$$

$$\chi = \frac{M_t}{J_p \cdot G} \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{1 \text{ kN m}}{2706 \text{ cm}^4 \cdot 80 \text{ GPa}} = 4,62 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{cm}}$$



3. Tubo (Bredt)



Calculo el área Ω

¡Importante!

El área Ω que se calcula es la encerrada por la línea media

$$\Omega = (200 - 6)mm \cdot (100 - 6)mm = 182,36 \text{ cm}^2$$

$$J_t = \frac{4 \cdot \Omega^2}{\int \frac{dl}{e}} \Rightarrow J_t = \frac{4 \cdot (182,36 \text{ cm}^2)^2}{\int \frac{dl}{6 \text{ mm}}} = \frac{133020 \text{ cm}^4}{\frac{2 \cdot (200 - 6)mm + 2 \cdot (100 - 6)mm}{6 \text{ mm}}} = 1385 \text{ cm}^4$$

$$\tau = \frac{M_t}{2 \cdot \Omega \cdot e} \Rightarrow \tau = \frac{1 \text{ kN m}}{2 \cdot 182,36 \text{ cm}^2 \cdot 0,6 \text{ cm}} = 4,58 \text{ MPa}$$

$$\chi = \frac{M_t}{J_t \cdot G} \Rightarrow \chi = \frac{1 \text{ kN m}}{1385,63 \text{ cm}^4 \cdot 80 \text{ GPa}} = 1,325 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{cm}}$$



Dado que las áreas de todos los perfiles son iguales:

¿Que conclusiones podemos sacar?

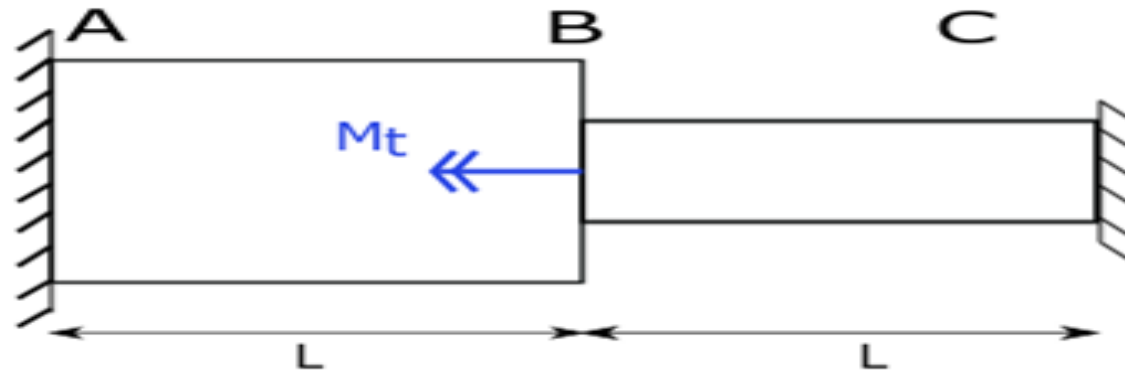
Conclusiones:

- El más conveniente es el anular, ya que el momento de inercia polar que le corresponde es mucho más grande, por lo que la curvatura y las tensiones resultantes son menores.
- El menos favorable entre estos será la sección maciza, ya que el momento de inercia es menor, y por lo tanto la curvatura y tensiones resultantes serán muy grande. Esto se da porque tiene material en el centro, y esto genera un menor brazo de palanca que no es eficiente para tomar torsión.



Ejercicio 2:

1. Determinar M_t admisible
2. Trazar diagramas de M_t , curvatura y giros
3. Tensiones tangenciales para cada sección



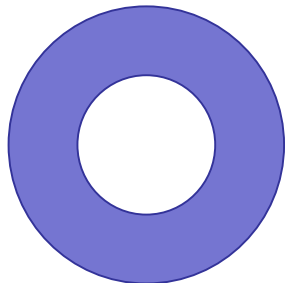
Datos:

$$L = 4 \text{ m}$$

$$G = 85 \text{ GPa}$$

$$\tau_{adm} = 50 \text{ MPa}$$

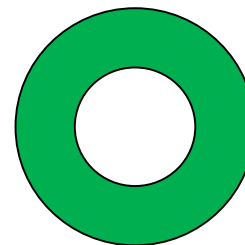
Sección AB:



$$R_1 = 6 \text{ cm}$$

$$r_1 = 5,5 \text{ cm}$$

Sección BC:



$$R_2 = 4 \text{ cm}$$

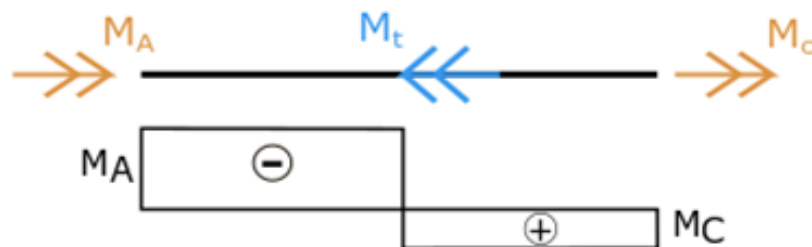
$$r_2 = 3,5 \text{ cm}$$

Resolución por inspección



A) Ecuación de equilibrio

$$M_t = M_A + M_C$$



Usamos la teoría de Coulomb

$$J_p = \frac{\pi}{32} \cdot (D_e^4 - D_i^4)$$

$$J_{AB} = 598,37 \text{ cm}^4$$

$$J_{BC} = 166,41 \text{ cm}^4$$

B) Ecuación de compatibilidad

$$\theta_A = 0$$

$$\theta_C = 0$$

$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \chi \, dx = -\frac{M_a}{(G \cdot J)_{AB}} \cdot L_{AB}$$

$$\theta_C = \theta_B + \int_B^C \chi \, dx = -\frac{M_a}{(G \cdot J)_{AB}} \cdot L_{AB} + \frac{M_c}{(G \cdot J)_{BC}} \cdot L_{BC} = 0$$

$$M_c = M_t - M_a \quad \longrightarrow \quad \frac{M_a}{(G \cdot J)_{AB}} \cdot L_{AB} = \frac{M_t - M_a}{(G \cdot J)_{BC}} \cdot L_{BC}$$

Despejando:

$$M_A = \frac{M_t \cdot J_{AB}}{J_{AB} + J_{BC}}$$

$$M_A = 0,782 M_t$$

$$M_C = 0,218 M_t$$



1. $M_{t \text{ adm}}$: verificamos ambas secciones y tomamos el menor M_t

Sección 1

$$\tau_{adm} = \frac{M_A}{J_{AB}} \cdot R_1 = \frac{0,782 \cdot M_t}{J_{AB}} \cdot R_1$$

$$M_t = \frac{\tau_{adm} \cdot J_{AB}}{R_1 \cdot 0,782} = 637,3 \text{ kN cm}$$

Sección 2

$$\tau_{adm} = \frac{M_c}{J_{BC}} \cdot R_2 = \frac{0,218 \cdot M_t}{J_{BC}} \cdot R_2$$

$$M_t = \frac{\tau_{adm} \cdot J_{BC}}{R_2 \cdot 0,218} = 956 \text{ kN cm}$$

El momento máximo admisible es el menor de los dos

$$M_t = 637,3 \text{ kN cm}$$



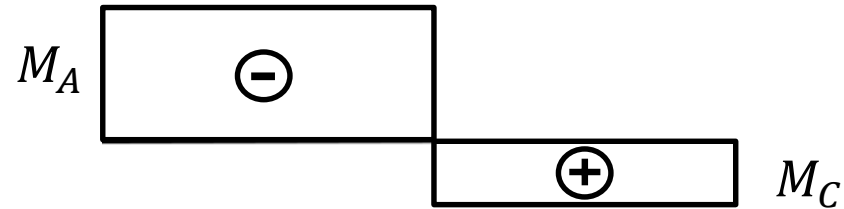
$$M_A = 498,6 \text{ kN cm}$$

$$M_C = 138,7 \text{ kN cm}$$



2. Diagramas

- Momento



$$M_A = 498,6 \text{ kN cm}$$

$$M_C = 138,7 \text{ kN cm}$$

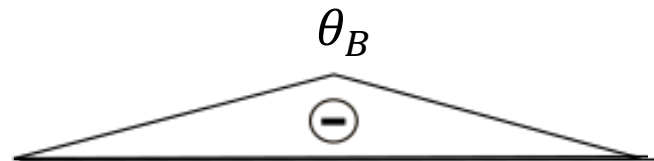
- Curvatura



$$\chi_A = \frac{M_A}{G \cdot J_{AB}} = 9,8 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{cm}}$$

$$\chi_C = \frac{M_C}{G \cdot J_{BC}} = 9,8 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{cm}}$$

- Giro



$$\theta_B = \int \chi \, dx = \frac{M_A \cdot L}{G \cdot J_{AB}} = 0,039 \text{ rad}$$

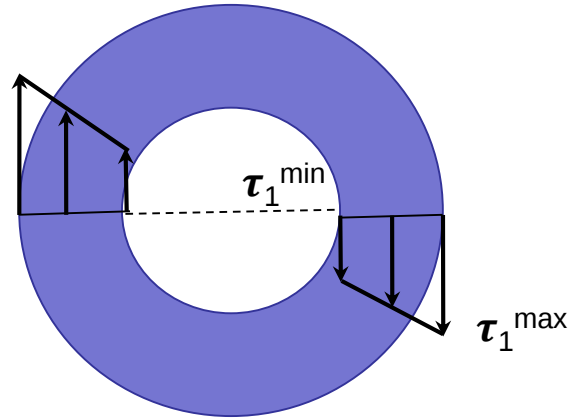


3. Tensiones tangenciales

Sección 1 - AB

$$M_A = 498,6 \text{ kN cm}$$

$$J_{AB} = 598,37 \text{ cm}^4$$



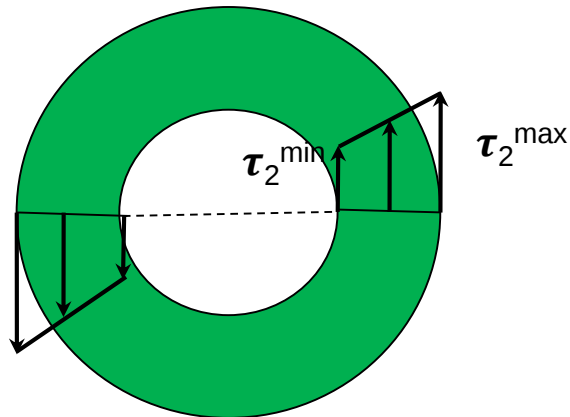
$$\tau_1^{\min} = \frac{M_A}{J_{AB}} \cdot r_1 = 4,58 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_1^{\max} = \frac{M_A}{J_{AB}} \cdot R_1 = 5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Sección 2 - BC

$$M_C = 138,7 \text{ kN cm}$$

$$J_{BC} = 166,41 \text{ cm}^4$$



$$\tau_2^{\min} = \frac{M_C}{J_{BC}} \cdot r_2 = 2,92 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_2^{\max} = \frac{M_C}{J_{BC}} \cdot R_2 = 3,33 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$