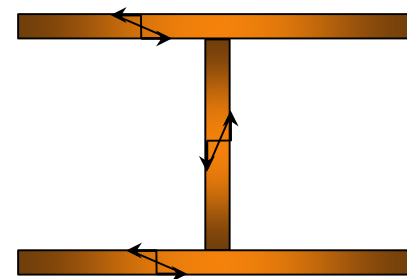
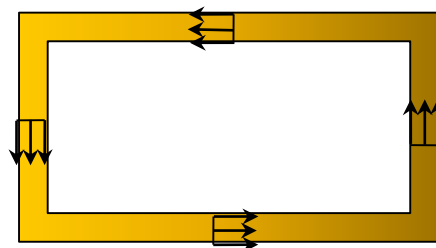
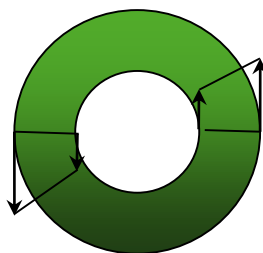
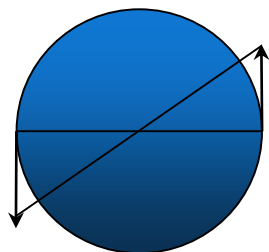




Solicitación por Torsión en Régimen Elástico



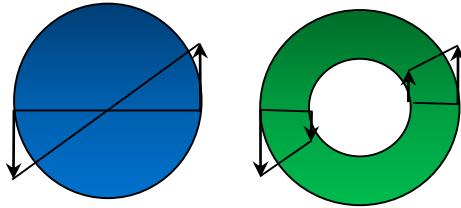
Constanza Ruffinelli – Tania Poletilo – Manuela Medina



Repaso clase teórica

Coulomb

Secciones circulares:
macizas o huecas



$$\tau = \frac{M_t}{J_p} \cdot r$$

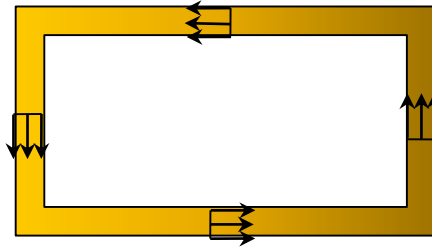
$$\chi = \frac{M_t}{J_p \cdot G}$$

$$J_p^{Cir} = \frac{\pi}{32} \cdot D^4$$

$$J_p^{An} = \frac{\pi}{32} \cdot (D_e^4 - D_i^4)$$

Bredt

Secciones cerradas
de pequeño espesor



$$\tau = \frac{M_t}{2 \cdot \Omega \cdot e}$$

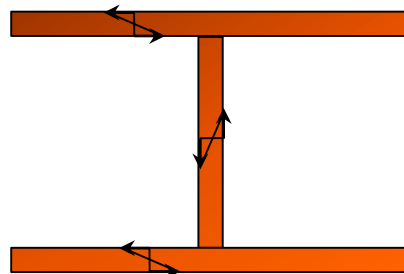
$$\chi = \frac{M_t}{J_t \cdot G}$$

$$J_t = \frac{4 \cdot \Omega^2}{\int \frac{dl}{e}}$$

Ω es el área encerrada por la línea media

Saint Venant

Secciones abiertas
de pequeño espesor



$$\tau = \frac{M_t}{J_t} \cdot e$$

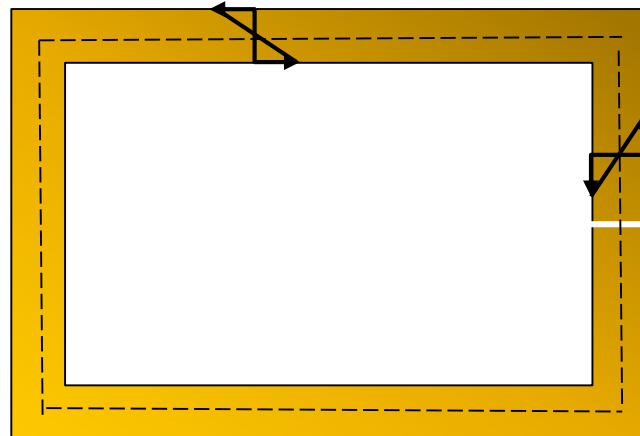
$$\chi = \frac{M_t}{J_t \cdot G}$$

$$J_t = \frac{1}{3} \cdot \sum (a_i \cdot e_i^3)$$



¡Observación!

Es importante notar que la sección debe ser completamente cerrada para poder usar Bredt. Si tuviese un corte infinitesimal en la sección tendría que usar Saint Venant

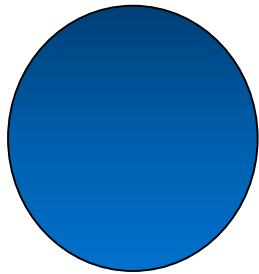




Ejercicio 1: Para cada una de las secciones calcular τ y χ .
¿Con cuál tendrá mayores tensiones y deformaciones?
¿Por que? (Tener en cuenta que todas las áreas son iguales)

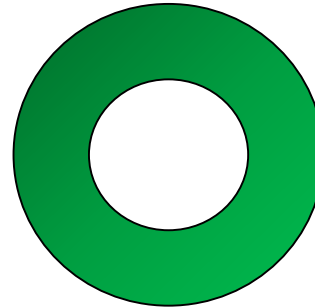
$$M_t = 1 \text{ kN m} \quad G = 80 \text{ GPa} \quad A \cong 33,18 \text{ cm}^2$$

1.



$$D_M = 6,5 \text{ cm}^2$$

2.



$$D_e = 18,5 \text{ cm}^2$$

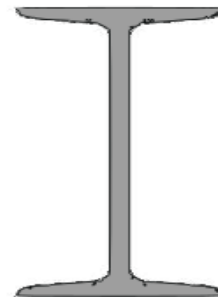
$$e = 6 \text{ mm}$$

$$D_i = D_e - 2 \cdot e = 17,3 \text{ cm}^2$$

3. Tubo (200x100x6)mm



4. IPN 200



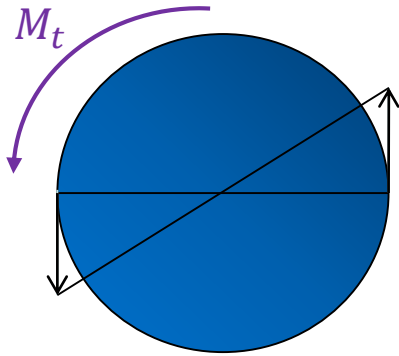
$$e_{ala} = 11,3 \text{ mm} \quad l_{ala} = 90 \text{ mm}$$

$$e_{alma} = 7,5 \text{ mm} \quad h = 200 \text{ mm}$$



Resolución:

1. Circular maciza (Coulomb):

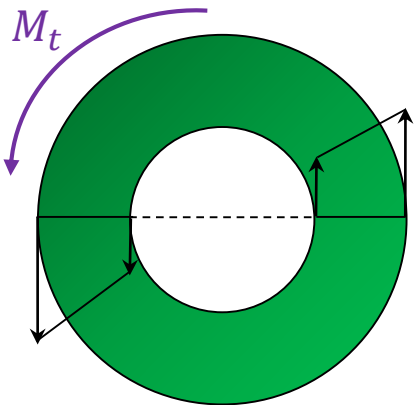


$$J_p = \frac{\pi}{32} \cdot D^4 \quad \Rightarrow \quad J_p = \frac{\pi}{32} \cdot (6,5 \text{ cm})^4 = 175 \text{ cm}^4$$

$$\tau = \frac{M_t}{J_p} \cdot r \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1 \text{ kN m}}{175 \text{ cm}^4} \cdot \frac{6,5 \text{ cm}}{2} = 18,54 \text{ MPa}$$

$$\chi = \frac{M_t}{J_p \cdot G} \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{1 \text{ kN m}}{175 \text{ cm}^4 \cdot 80 \text{ GPa}} = 7,14 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{cm}}$$

2. Anular (Coulomb):



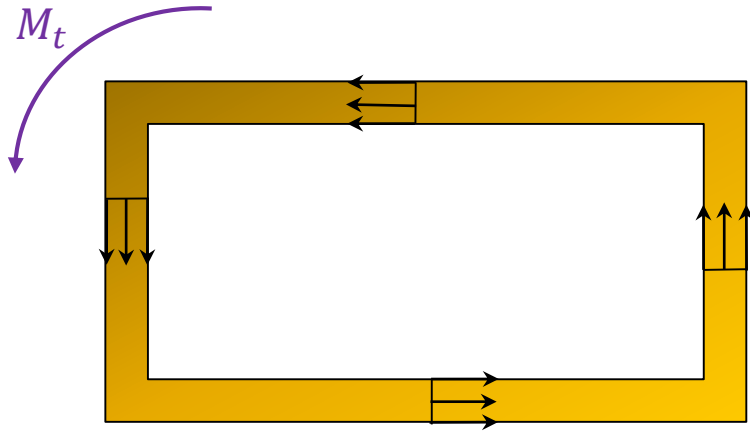
$$J_p = \frac{\pi}{32} \cdot (D_e^4 - D_i^4) \quad \Rightarrow \quad J_p = \frac{\pi \cdot [(18,5 \text{ cm})^4 - (17,3 \text{ cm})^4]}{32} = 2706 \text{ cm}^4$$

$$\tau = \frac{M_t}{J_p} \cdot r \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1 \text{ kN m}}{2706 \text{ cm}^4} \cdot \frac{18,5 \text{ cm}}{2} = 3,42 \text{ MPa}$$

$$\chi = \frac{M_t}{J_p \cdot G} \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{1 \text{ kN m}}{2706 \text{ cm}^4 \cdot 80 \text{ GPa}} = 4,62 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{cm}}$$



3. Tubo (Bredt)



Calculo el área Ω

Importante

El área Ω que se calcula es la encerrada por la línea media

$$\Omega = (200 - 6)mm \cdot (100 - 6)mm = 182,36 \text{ cm}^2$$

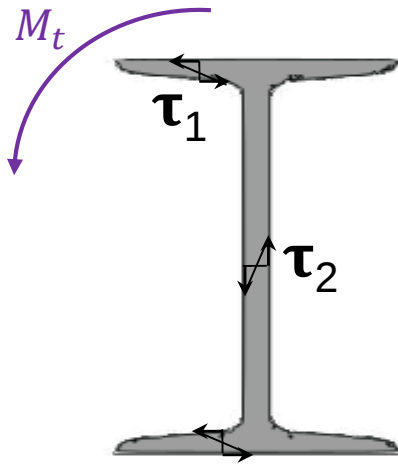
$$J_t = \frac{4 \cdot \Omega^2}{\int \frac{dl}{e}} \quad \Rightarrow \quad J_t = \frac{4 \cdot (182,36 \text{ cm}^2)^2}{\int \frac{dl}{6 \text{ mm}}} = \frac{133020 \text{ cm}^4}{2 \cdot \frac{(200 - 6)mm}{6 \text{ mm}} + 2 \cdot \frac{(100 - 6)mm}{6 \text{ mm}}} = 1385 \text{ cm}^4$$

$$\tau = \frac{M_t}{2 \cdot \Omega \cdot e} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1 \text{ kN m}}{2 \cdot 182,36 \text{ cm}^2 \cdot 0,6 \text{ cm}} = 4,58 \text{ MPa}$$

$$\chi = \frac{M_t}{J_t \cdot G} \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{1 \text{ kN m}}{1385,63 \text{ cm}^4 \cdot 80 \text{ GPa}} = 1,325 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{cm}}$$



4. IPN 200 (Saint Venant)



$$J_t = \frac{1}{3} \cdot \sum (a_i \cdot e_i^3)$$



$$J_t = \frac{1}{3} \cdot [2 \cdot (200 \text{ mm} \cdot (11,3 \text{ mm})^3) + (200 - 2 \cdot 11,3) \text{ mm} \cdot (7,5 \text{ mm})^3] = 11,15 \text{ cm}^4$$

Importante

- Se deben sumar los términos de cada uno de los rectángulos (existe más de una forma de hacer esto)
- El valor que va elevado al cubo es el lado más chico del rectángulo

¡No era necesario calcularlo porque está en tabla!  $J_t = 11,2 \text{ cm}^4$

$$\tau_1 = \frac{M_t}{J_t} \cdot e_1 \quad \text{purple arrow} \quad \tau_1 = \frac{1 \text{ kN m}}{11,2 \text{ cm}^4} \cdot 11,3 \text{ mm} = 100,9 \text{ MPa}$$

$$\tau_2 = \frac{M_t}{J_t} \cdot e_2 \quad \text{purple arrow} \quad \tau_2 = \frac{1 \text{ kN m}}{11,2 \text{ cm}^4} \cdot 7,5 \text{ mm} = 66,96 \text{ MPa}$$

$$\chi = \frac{M_t}{J_t \cdot G} \quad \text{purple arrow} \quad \chi = \frac{1 \text{ kN m}}{11,2 \text{ cm}^4 \cdot 80 \text{ GPa}} = 1,1 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}}$$



1. Circular maciza (Coulomb):

$$\tau = \frac{1 \text{ kN m}}{175 \text{ cm}^4} \cdot \frac{6,5 \text{ cm}}{2} = 18,54 \text{ MPa}$$

$$\chi = \frac{1 \text{ kN m}}{175 \text{ cm}^4 \cdot 80 \text{ GPa}} = 7,14 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{cm}}$$

2. Anular (Coulomb):

$$\tau = \frac{1 \text{ kN m}}{2706 \text{ cm}^4} \cdot \frac{18,5 \text{ cm}}{2} = 3,42 \text{ MPa}$$

$$\chi = \frac{1 \text{ kN m}}{2706 \text{ cm}^4 \cdot 80 \text{ GPa}} = 4,62 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{cm}}$$

3. Tubo (Bredt):

$$\tau = \frac{1 \text{ kN m}}{2 \cdot 182,36 \text{ cm}^2 \cdot 0,6 \text{ cm}} = 4,58 \text{ MPa}$$

$$\chi = \frac{1 \text{ kN m}}{1385,63 \text{ cm}^4 \cdot 80 \text{ GPa}} = 1,325 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{cm}}$$

4. IPN 200 (Saint Venant)

$$\tau = \frac{1 \text{ kN m}}{11,2 \text{ cm}^4} \cdot 11,3 \text{ mm} = 100,9 \text{ MPa}$$

$$\chi = \frac{1 \text{ kN m}}{11,2 \text{ cm}^4 \cdot 80 \text{ GPa}} = 1,1 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}}$$



Dado que las áreas de todos los perfiles son iguales:

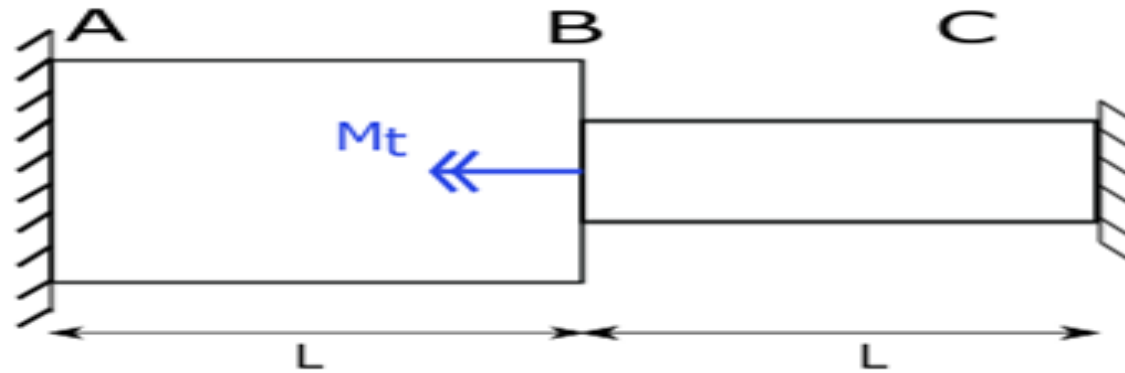
Conclusiones:

- El más conveniente es el anular, ya que el momento de inercia polar que le corresponde es mucho más grande, por lo que la curvatura y las tensiones resultantes son menores.
- El menos favorable será la sección abierta, ya que el momento de inercia a la torsión es muy chico, y por lo tanto la curvatura y tensiones resultantes serán muy grande. Es decir los perfiles abiertos no son eficientes para torsión,
- La sección maciza tampoco es eficiente, ya que el momento de inercia resulta bajo. Esto se da porque tiene material en el centro, y esto genera un menor brazo de palanca que no es eficiente para tomar torsión.



Ejercicio 2:

1. Determinar M_t admisible
2. Trazar diagramas de M_t , curvatura y giros
3. Tensiones tangenciales para cada sección



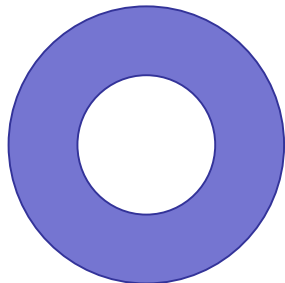
Datos:

$$L = 4 \text{ m}$$

$$G = 85 \text{ GPa}$$

$$\tau_{adm} = 50 \text{ MPa}$$

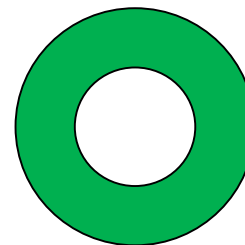
Sección AB:



$$R_1 = 6 \text{ cm}$$

$$r_1 = 5,5 \text{ cm}$$

Sección BC:



$$R_2 = 4 \text{ cm}$$

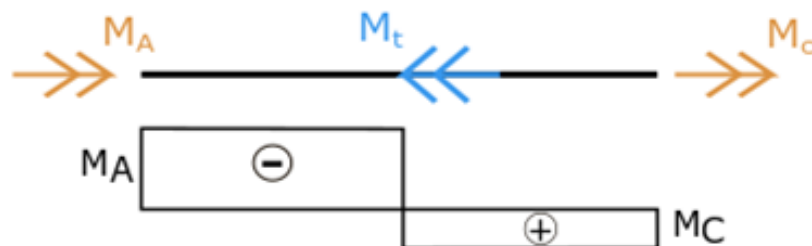
$$r_2 = 3,5 \text{ cm}$$

Resolución por inspección



A) Ecuación de equilibrio

$$M_t = M_A + M_C$$



Usamos la teoría de Coulomb

$$J_p = \frac{\pi}{32} \cdot (D_e^4 - D_i^4)$$

$$J_{AB} = 598,37 \text{ cm}^4$$

$$J_{BC} = 166,41 \text{ cm}^4$$

B) Ecuación de compatibilidad

$$\theta_A = 0$$

$$\theta_C = 0$$

$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \chi \, dx = -\frac{M_a}{(G \cdot J)_{AB}} \cdot L_{AB}$$

$$\theta_C = \theta_B + \int_B^C \chi \, dx = -\frac{M_a}{(G \cdot J)_{AB}} \cdot L_{AB} + \frac{M_c}{(G \cdot J)_{BC}} \cdot L_{BC} = 0$$

$$M_c = M_t - M_a \quad \longrightarrow \quad \frac{M_a}{(G \cdot J)_{AB}} \cdot L_{AB} = \frac{M_t - M_a}{(G \cdot J)_{BC}} \cdot L_{BC}$$

Despejando:

$$M_A = \frac{M_t \cdot J_{AB}}{J_{AB} + J_{BC}}$$

$$M_A = 0,782 M_t$$

$$M_C = 0,218 M_t$$



1. $M_{t adm}$: verificamos ambas secciones y tomamos el menor M_t

Sección 1

$$\tau_{adm} = \frac{M_A}{J_{AB}} \cdot R_1 = \frac{0,782 \cdot M_t}{J_{AB}} \cdot R_1$$

$$M_t = \frac{\tau_{adm} \cdot J_{AB}}{R_1 \cdot 0,782} = 637,3 \text{ kN cm}$$

Sección 2

$$\tau_{adm} = \frac{M_c}{J_{BC}} \cdot R_2 = \frac{0,218 \cdot M_t}{J_{BC}} \cdot R_2$$

$$M_t = \frac{\tau_{adm} \cdot J_{BC}}{R_2 \cdot 0,218} = 956 \text{ kN cm}$$

El momento máximo admisible es el menor de los dos

$$M_t = 637,3 \text{ kN cm}$$



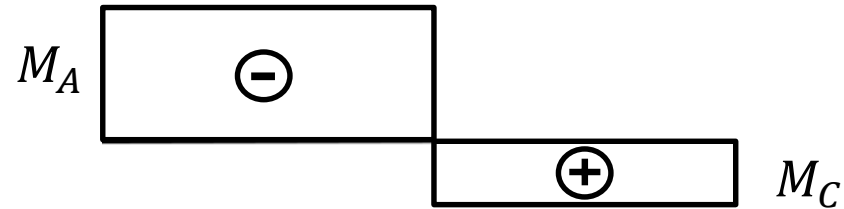
$$M_A = 498,6 \text{ kN cm}$$

$$M_C = 138,7 \text{ kN cm}$$



2. Diagramas

- Momento



$$M_A = 498,6 \text{ kN cm}$$

$$M_C = 138,7 \text{ kN cm}$$

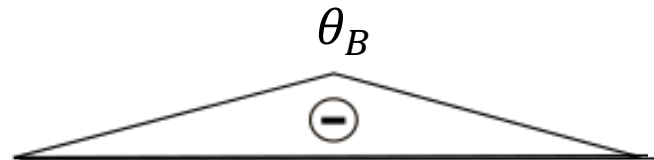
- Curvatura



$$\chi_A = \frac{M_A}{G \cdot J_{AB}} = 9,8 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{cm}}$$

$$\chi_C = \frac{M_C}{G \cdot J_{BC}} = 9,8 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{cm}}$$

- Giro



$$\theta_B = \int \chi \, dx = \frac{M_A \cdot L}{G \cdot J_{AB}} = 0,039 \text{ rad}$$

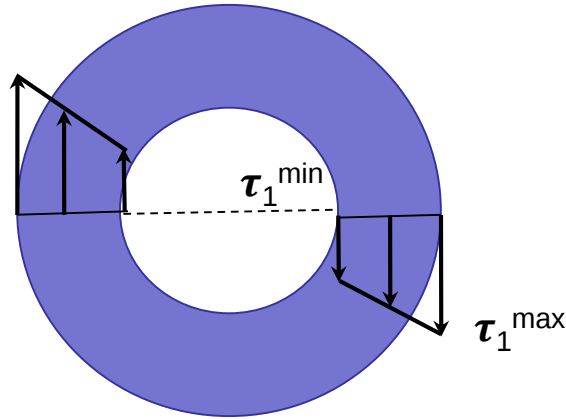


3. Tensiones tangenciales

Sección 1 - AB

$$M_A = 498,6 \text{ kN cm}$$

$$J_{AB} = 598,37 \text{ cm}^4$$



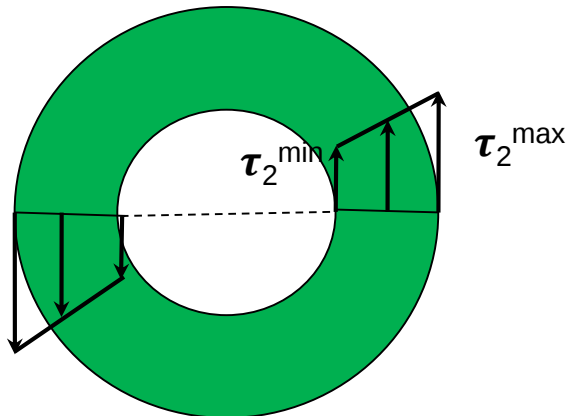
$$\tau_1^{\min} = \frac{M_A}{J_{AB}} \cdot r_1 = 4,58 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_1^{\max} = \frac{M_A}{J_{AB}} \cdot R_1 = 5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Sección 2 - BC

$$M_C = 138,7 \text{ kN cm}$$

$$J_{BC} = 166,41 \text{ cm}^4$$

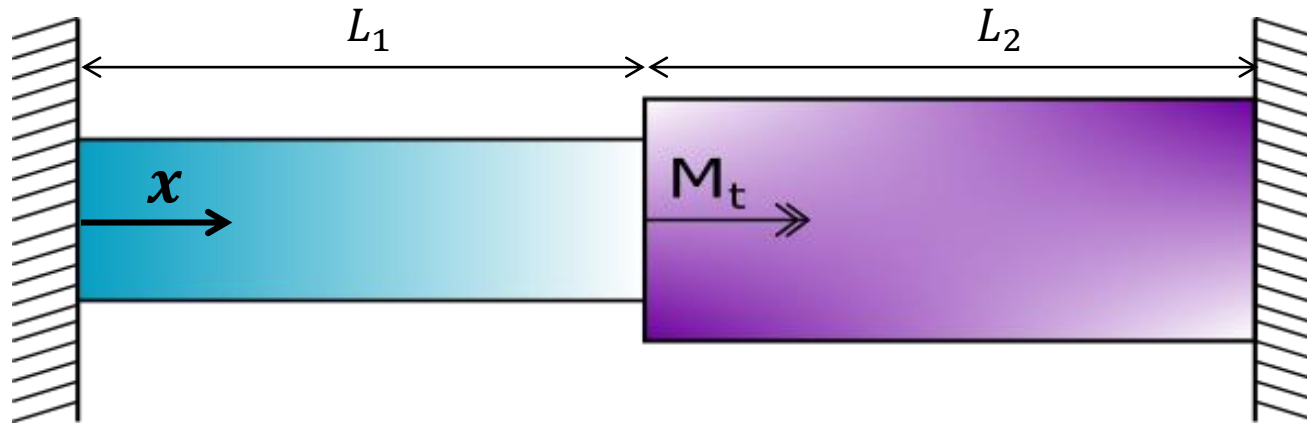


$$\tau_2^{\min} = \frac{M_C}{J_{BC}} \cdot r_2 = 2,92 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_2^{\max} = \frac{M_C}{J_{BC}} \cdot R_2 = 3,33 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$



Ejercicio 3: Calcular las reacciones de vínculo



Datos:

$$L_1 = 2 \text{ m}$$

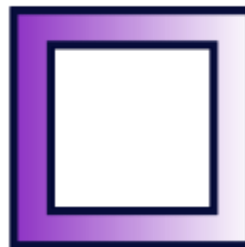
$$L_2 = 3 \text{ m}$$

$$M_t = 10 \text{ kN m}$$

Sección A



Sección B



$$G_a = 8000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

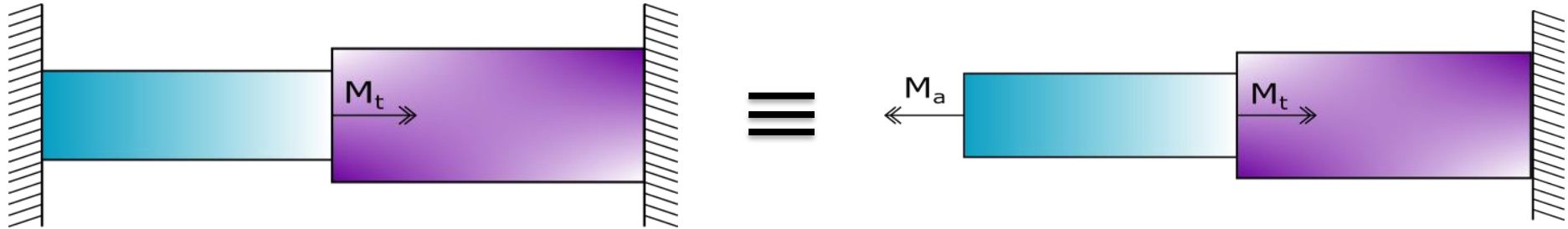
$$G_b = 6000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$J_{ta} = 115 \text{ cm}^4$$

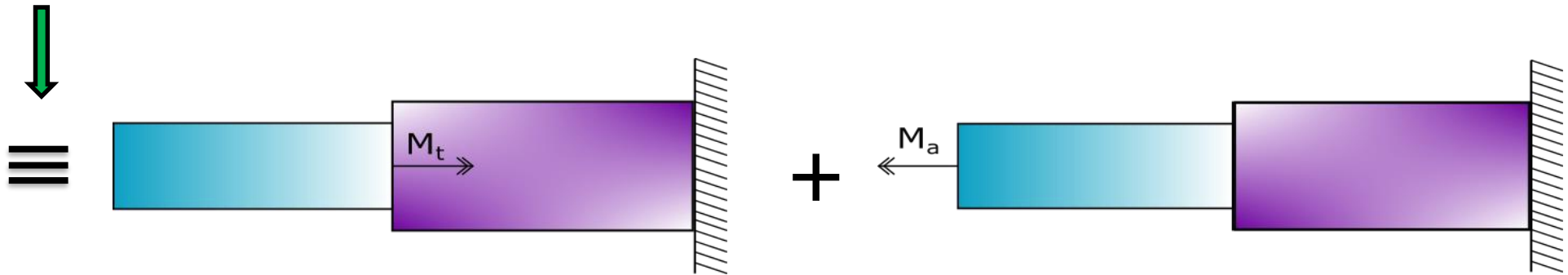
$$J_{tb} = 800 \text{ cm}^4$$

Para resolver éste ejercicio utilizaremos el Método de las Incógnitas Estáticas

Método de las incógnitas estáticas



Superposición
de Efectos



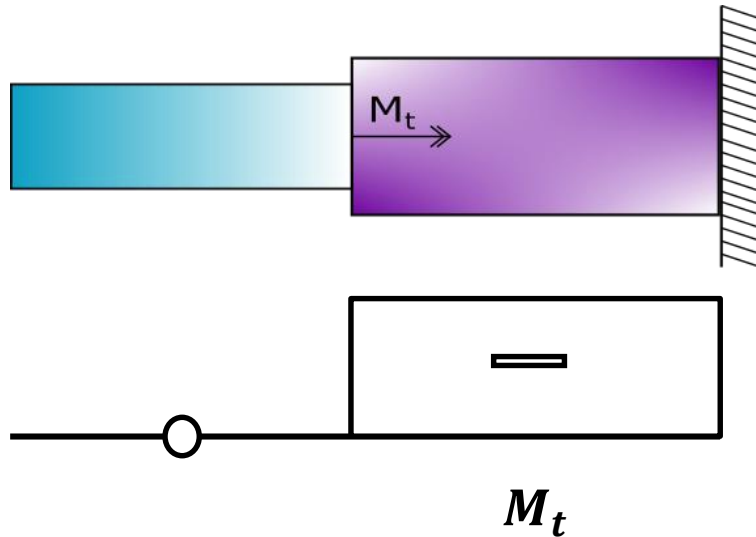
$$\theta_A^H = \theta_A^{M_A} + \theta_A^{M_t} = 0$$

Resolución por Teorema de los Trabajos Virtuales

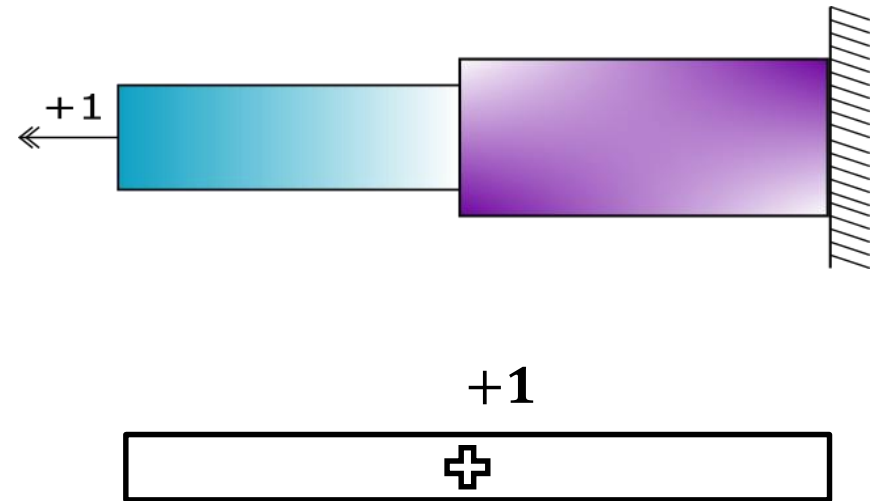


Calculo el giro $\theta_A^{M_t}$

DV_1



SE



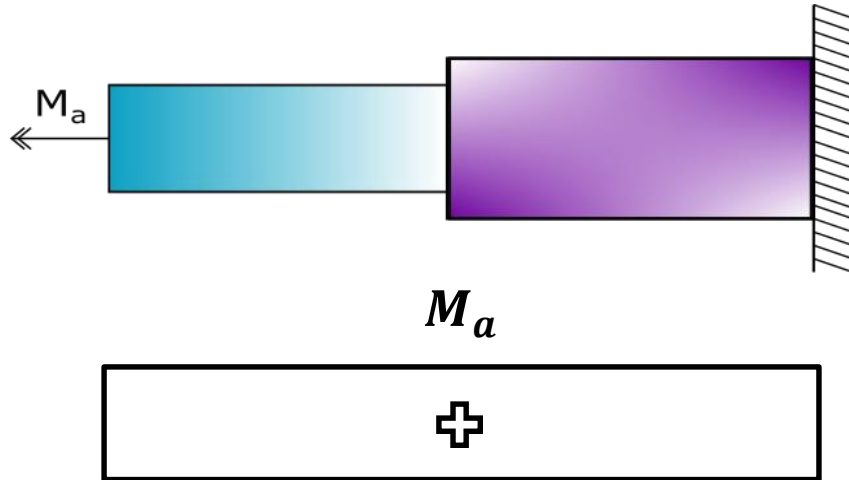
$$\theta_A^{M_t} = \int_l M_{SE} d\theta = \int_l M_{SE} \cdot \frac{M_{DV}}{G \cdot J} dx = M_{SE} \cdot \frac{M_{DV_1} \cdot L_2}{G_b \cdot J_b} = +1 \cdot \frac{-1000 \text{ kN cm} \cdot 300 \text{ cm}}{6000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 800 \text{ cm}^4}$$

$$\theta_A^{M_t} = -0,0625 \text{ rad}$$

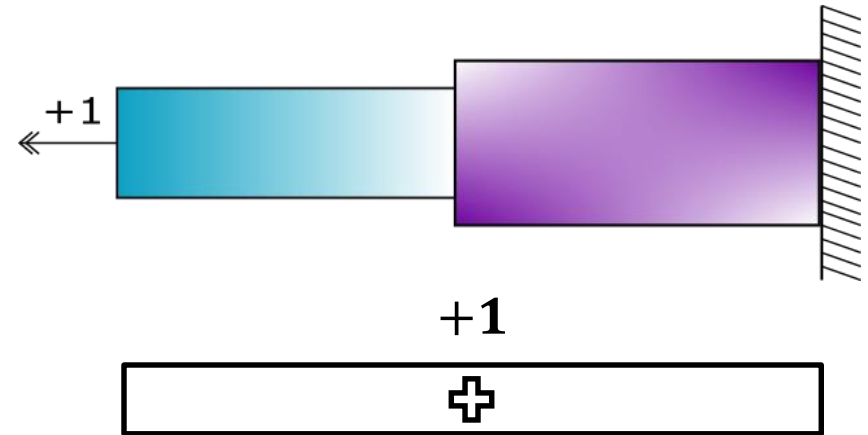


Calculo el giro $\theta_A^{M_A}$

DV_2



SE



$$\theta_A^{M_A} = \int_l M_{SE} \cdot \frac{M_{DV}}{G \cdot J} dx = 1 \cdot \frac{M_a \cdot L_1}{G_a \cdot J_a} + 1 \cdot \frac{M_a \cdot L_2}{G_b \cdot J_b}$$

$$\theta_A^{M_A} = M_a \cdot \left(\frac{200 \text{ cm}}{8000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 115 \text{ cm}^4} + \frac{300 \text{ cm}}{6000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \cdot 800 \text{ cm}^4} \right)$$

$$\theta_A^{M_A} = 2,799 \cdot \frac{10^{-4}}{\text{kN cm}} \cdot M_a$$



Reemplazando en la ecuación de compatibilidad

$$\theta_A^H = \theta_A^{M_A} + \theta_A^{M_t} = 0$$

$$\theta_A^{M_A} + \theta_A^{M_t} = -0,0625 \text{ rad} + 2,799 \cdot \frac{10^{-4} \text{ rad}}{\text{kN cm}} \cdot M_a = 0$$

$$M_a = \frac{0,0625 \text{ kN cm}}{2,799 \cdot 10^{-4}} \quad \longrightarrow \quad M_a = 223,3 \text{ kN cm}$$

Aclaración

No suele ser conveniente usar TTV para torsión, es recomendable plantearlo directamente por inspección (o MIE pero calculando el giro directamente)