

CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS EN FLEXIÓN VARIABLE:

Este tema se compone de las siguientes partes:

0.- Planteo del Problema;

1.- Trabajo de las Fuerzas Exteriores;

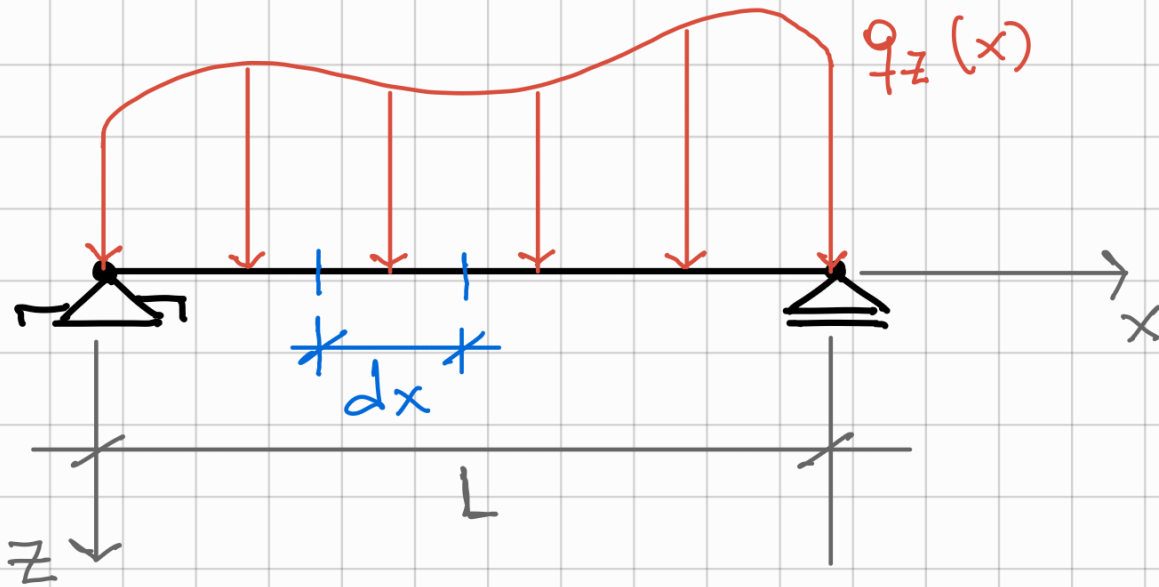
2.- Energía Interna de Deformación;

3.- Planteo del Principio de Equivalencia;

4.- Aplicación a la Sección Rectangular;

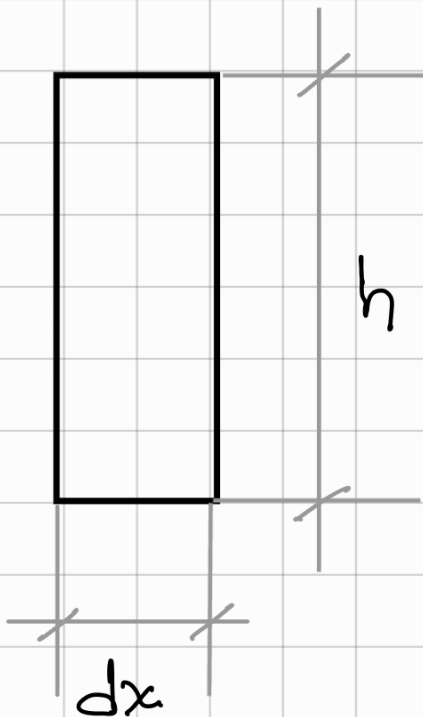
5.- Cálculo del Desplazamiento a un caso Práctico -
Comparación

0.- PLANTEO DEL PROBLEMA:



$q_z(x)$ $\rightarrow$ $M_y(x)$ variable $\rightarrow$ $Q_z(x)$

DESPLAZAMIENTOS POR CORTE



HIPÓTESIS VÁLIDAS

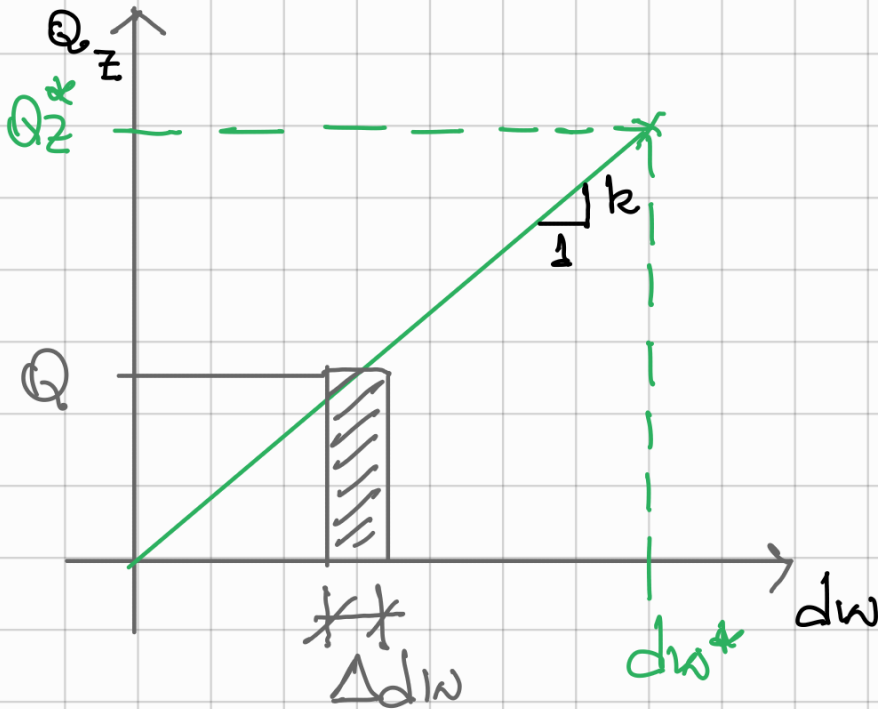
- HLM ✓
- HBN ✓

$$\delta W = \delta U$$

PRINCIPIO DE LOS VARIACIONES

ELEMENTO DIFERENCIAL
DE BARRA

1.- TRABAJO DE LAS FUERZAS EXTERIORES:



$$Q_z = k \cdot dw$$

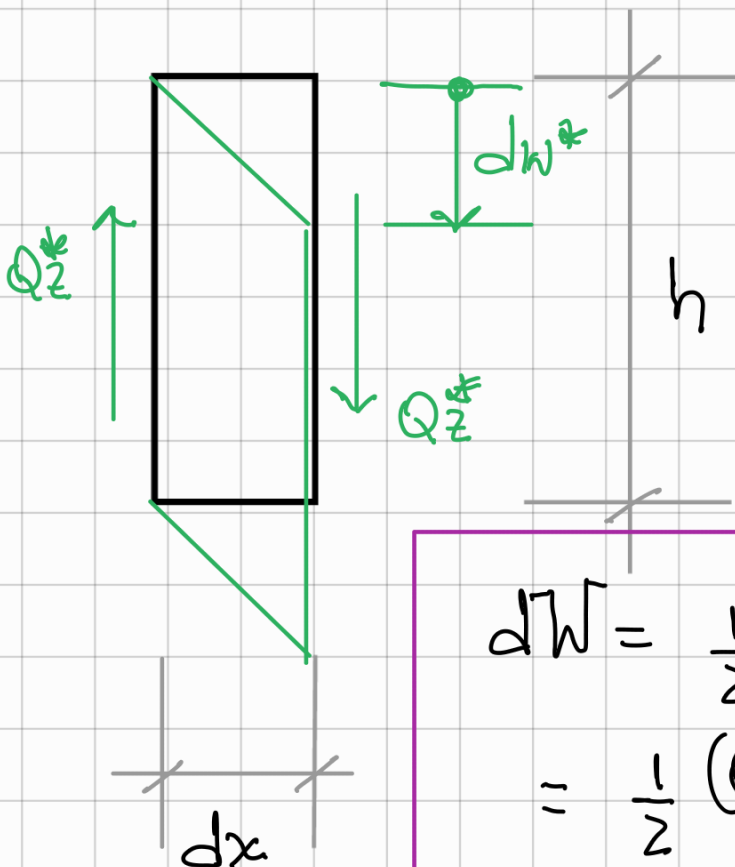
DIFERENCIAL DE TRABAJO

$$\Delta dW = Q \cdot \Delta dw$$

$$dW = \int \Delta dW =$$

$$= \int Q \cdot \Delta dw =$$

$$= \int_0^{dw*} k dw \Delta dw$$



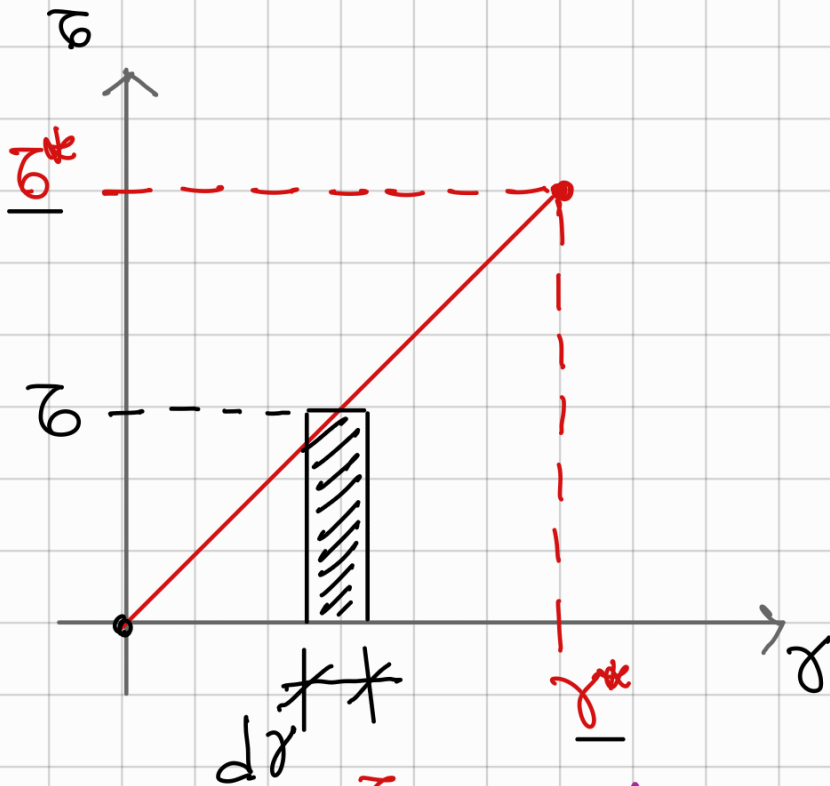
$$dW = \frac{1}{2} k (dw*)^2 = \frac{1}{2} Q_z^* dw* =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{Q_z^*}{k} \right)^2$$

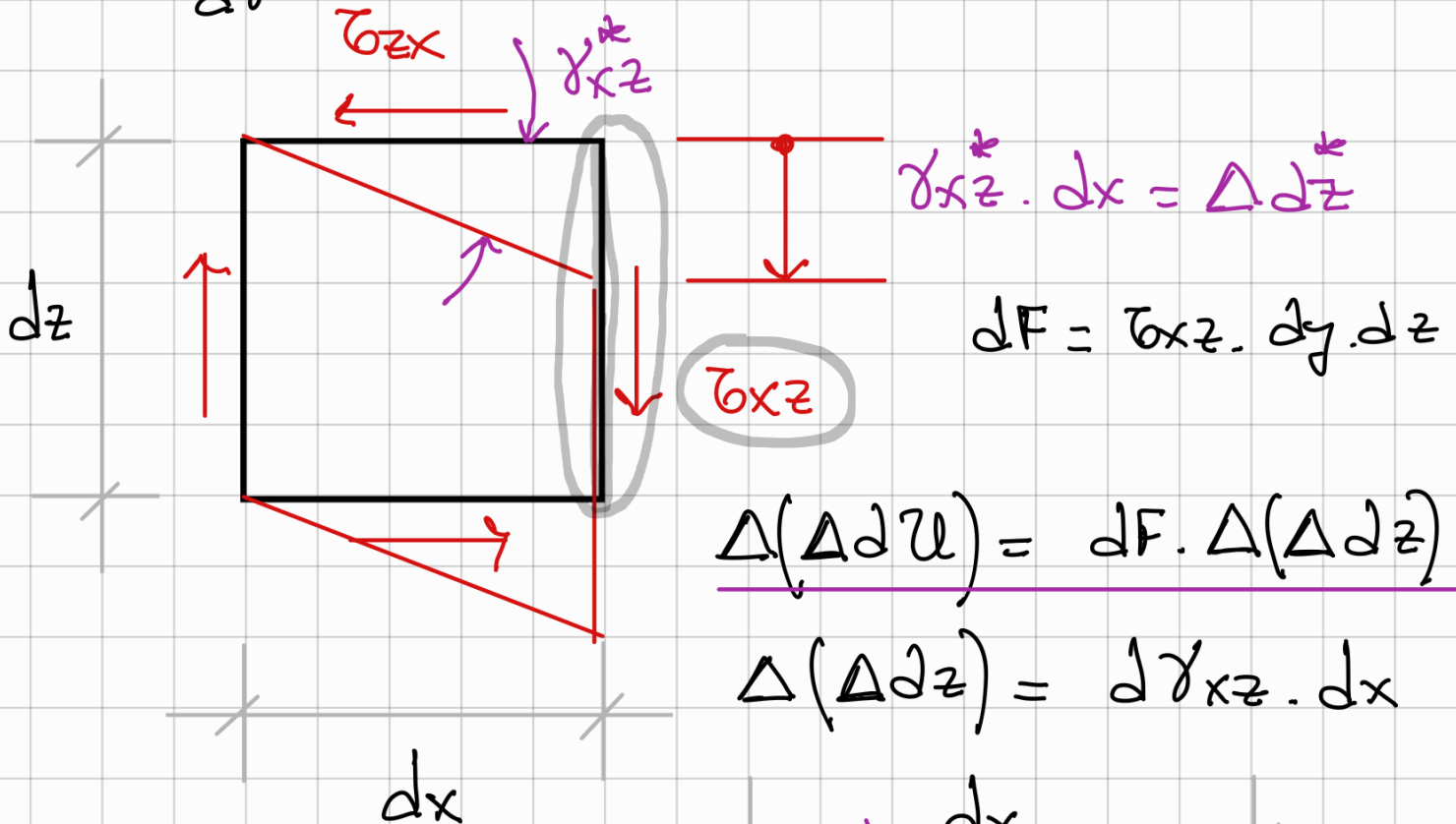
POR QUÉ SE PLANTEA UN DIFERENCIAL DE TRABAJO?

→ Porque se está trabajando con un diferencial de volumen.

2.- ENERGÍA INTERNA DE DEFORMACIÓN:



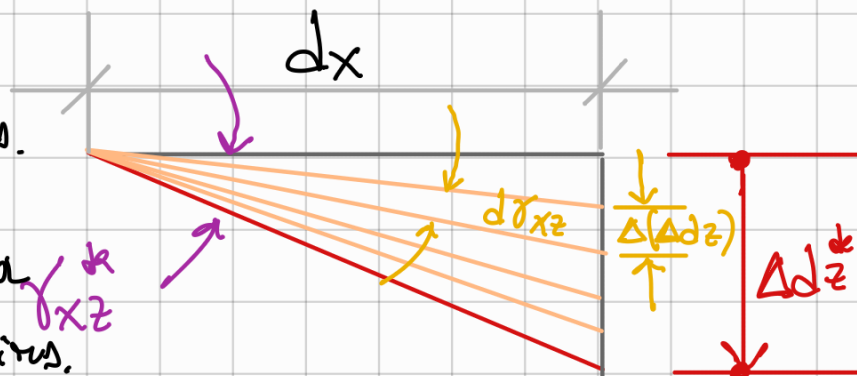
$$\tau = G\gamma$$



$dU \rightarrow$ APlica AL DIF. DE LONGITUD.

$\Delta dU \rightarrow$ APlica AL CUBO ELEMENTAL γ_{xz}^* DENTRO DEL DIF. DE LONGITUD.

$\Delta(\Delta dU) \rightarrow$ APlica A LOS SUCESIVOS INCREMENTOS DEL DESPLAZ. $\Delta(\Delta dz)$



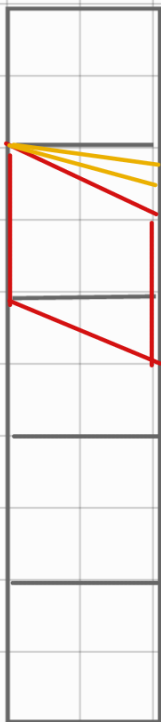
$$\Delta(\Delta d u) = \underbrace{\tau_{xz} \cdot dy \cdot dz}_{dF} \cdot \underbrace{d\gamma_{xz} \cdot dx}_{\Delta(\Delta dz)}$$

$$\Delta(\Delta d u) = \underbrace{\tau_{xz} \cdot d\gamma_{xz}}_{\Delta(\Delta du)} \cdot \underbrace{dx \cdot dy \cdot dz}_{dV}$$

ENERGÍA UN. DE DEFORM. ESPECÍFICA.

$$\Delta u = \int \Delta(\Delta d u) = \int_0^{\gamma_{xz}^*} \tau_{xz} \cdot dV \cdot d\gamma_{xz} = \int_0^{\gamma_{xz}^*} G \cdot \gamma_{xz} \cdot dV \cdot d\gamma_{xz}$$

$$\Delta d u = \frac{1}{2} G \cdot (\gamma_{xz}^*)^2 dV = \frac{1}{2} \tau_{xz}^* \cdot \gamma_{xz}^* \cdot dV \leftarrow$$



$\Delta dz \rightarrow \Delta d u$ en $dV = dx dy dz$

$$d u = \int \Delta d u = \int \frac{1}{2} \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} dV$$

consideración:

$$\rightarrow dx \cdot dy \cdot dz = dV$$

$$\rightarrow h \cdot dx = dV'$$

$$\rightarrow d u \text{ ES LA INTEGRAL EN } \int dV = dV'$$

$$d u = \frac{1}{2} \int_{dV'} \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} \cdot dV = \frac{1}{2} \int_{dV'} \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} dx dy dz$$

3.- PLANTEO DEL PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA:

$$\delta W = \delta U$$

$$\frac{1}{2} Q_z \cdot dw = \frac{1}{2} \int_{dv} \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} \cdot \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{dv}$$

$$Q_z \cdot \frac{dw}{dx} = \int_A \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} \cdot dy \cdot dz$$

↑ Área de la sección.

$$Q_z \cdot \frac{dw}{dx} = \int_A \frac{\tau_{xz}^2}{G} dA = \int_A \frac{Q_z^2 \cdot (S_{xz}^*)^2}{G \cdot I_{xz}^2 \cdot (b^*)^2} \cdot dA$$

τ_{xz}^2

$$I_{xz} = I_y = r_y^2 \cdot A \rightarrow I_{xz}^2 = I_y^2 = r_y^4 \cdot A^2$$

$$S_{xz}^* = S_y^* \rightarrow (S_{xz}^*)^2 = (S_y^*)^2$$

$$Q_z \cdot \frac{dw}{dx} = \int_A \frac{Q_z^2 \cdot (S_y^*)^2}{G \cdot r_y^4 \cdot A^2 \cdot (b^*)^2} dA = \frac{Q_z^2}{G \cdot A} \int_A \frac{(S_y^*)^2}{r_y^4 \cdot (b^*)^2} \cdot \frac{dA}{A}$$

$$dw = dw \Big|_{Q_z} = \frac{Q_z}{G \cdot A} \left[\int_A \frac{(S_y^*)^2}{r_y^4 \cdot b^2} \cdot \frac{dA}{A} \right] \cdot dx$$

$k_y = k_{tw}$

FACTOR DE FORMA DE LA SECCIÓN RESPECTO DEL k_{tw} (para y)

$$\frac{dw}{dx} \Big|_{Q_z} = \frac{Q_z}{G \cdot A} \cdot k_y \cdot dx = dc_z$$

FACTOR DE FORMA DE LA SECCIÓN RESPECTO DEL EJE 'Y' :

$M_y(x) \rightarrow Q_z(x)$ $W \equiv \text{EJE 'Y'}$!

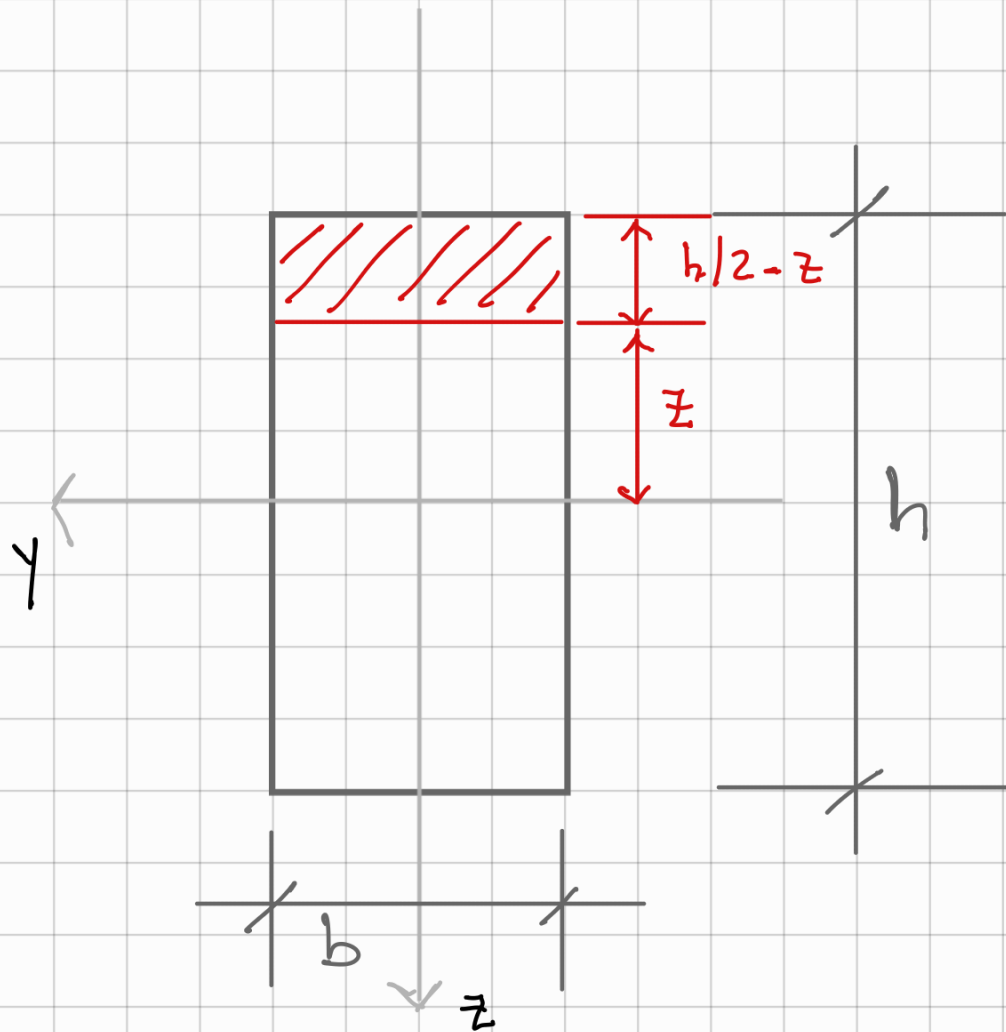
$$k_y = \int_A \frac{(S_y^*)^2}{r_y^4 \cdot b^2} \cdot \frac{dA}{A}$$

FACTOR DE FORMA DE LA SECCIÓN RESPECTO DEL EJE 'Z' :

$M_z(x) \rightarrow Q_y(x) \rightarrow W \equiv \text{EJE 'Z'}$!

$$k_z = \int_A \frac{(S_z^*)^2}{r_z^4 \cdot b^2} \cdot \frac{dA}{A}$$

4.- APLICACIÓN A SECCIÓN RECTANGULAR:



$$b^* = b$$

$$A = b \cdot h$$

$$I_y = \frac{b h^3}{12}$$

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{b h^3}{12 b h}$$

$$r_y^2 = \frac{h^2}{12}$$

$$r_y^4 = \frac{h^4}{144}$$

$$dA = b \cdot \left(\frac{h}{2} - z \right); \quad z^* = z + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - z \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + z \right)$$

$$S_y^* = z^* \cdot dA = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + z \right) b \cdot \left(\frac{h}{2} - z \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

$$K_y = \int_A \frac{\left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \right]^2}{\frac{h^4}{144} \cdot b^2} \cdot \frac{dA}{b h}$$

$$\frac{h^2}{4} - z^2 = \frac{h^2}{4} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] = \frac{h^2}{4} \left[1 - \frac{4z^2}{h^2} \right]$$

$$I_y = \int_A \frac{\left[\frac{b}{2} \frac{h^2}{4} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \right]^2}{\frac{h^4}{144} \cdot b^2} \cdot \frac{dA}{b \cdot dz}$$

$$I_y = \int_A \frac{\frac{b^2}{4} \cdot \frac{h^4}{4^2} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right)^2}{\frac{h^4}{144} \cdot b^2} \cdot \frac{dz}{h}$$

$$I_y = \int \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{h} \cdot \left[1 - \frac{4z^2}{h^2} \right]^2 \cdot dz = \frac{9}{4h} \int_{-h/2}^{h/2} \left[1 - \frac{4z^2}{h^2} \right]^2 dz$$

$$I_y = \frac{9}{4h} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \left[1 + \frac{16z^4}{h^4} - \frac{8z^2}{h^2} \right] dz \right] =$$

$$= \frac{9}{4h} \left[z + \frac{16}{5h^4} \cdot z^5 - \frac{8}{3h^2} z^3 \right]_{-h/2}^{+h/2}$$

$\frac{8h}{15}$

$$k_y = \frac{\overset{3}{9}}{\underset{1}{4h}} \cdot \frac{\overset{2}{8h}}{\underset{5}{15}} = \frac{6}{5}$$

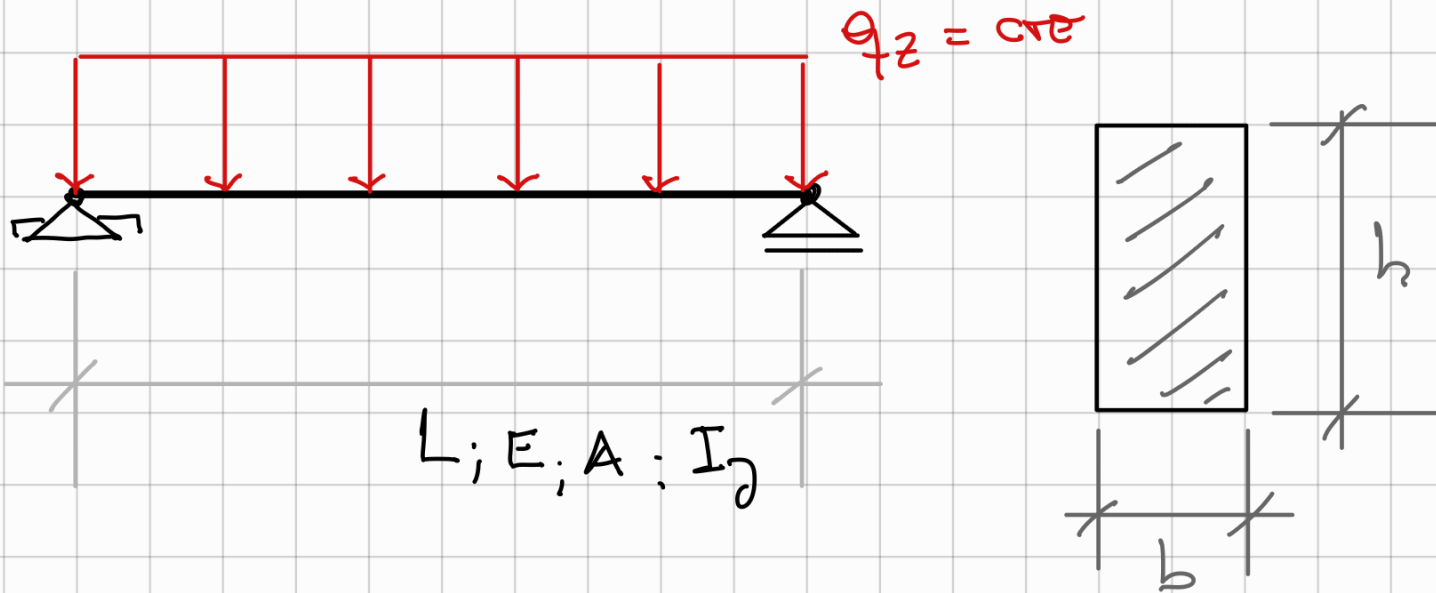
$$dW|_{Q_z} = dC_z = \frac{k_y Q_z}{G \cdot A} \cdot dx = \frac{Q_z}{G \cdot \underbrace{\frac{A}{k_y}}_{A_y}} \cdot dx \leftarrow$$

$$dW|_{Q_z} = dC_z = \frac{Q_z}{G \cdot A_y} dx$$

$$A_y = \frac{A}{k_y} = \frac{A}{6/5} = \frac{5}{6} A$$

5.- CÁLCULO DEL DESPLAZAMIENTO A UN CASO PRÁCTICO

- COMPARACIÓN:



$$w_{\max} \Big|_{M_y} = w\left(\frac{L}{2}\right) \Big|_{M_y} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_z \cdot L^4}{E \cdot I_y}$$

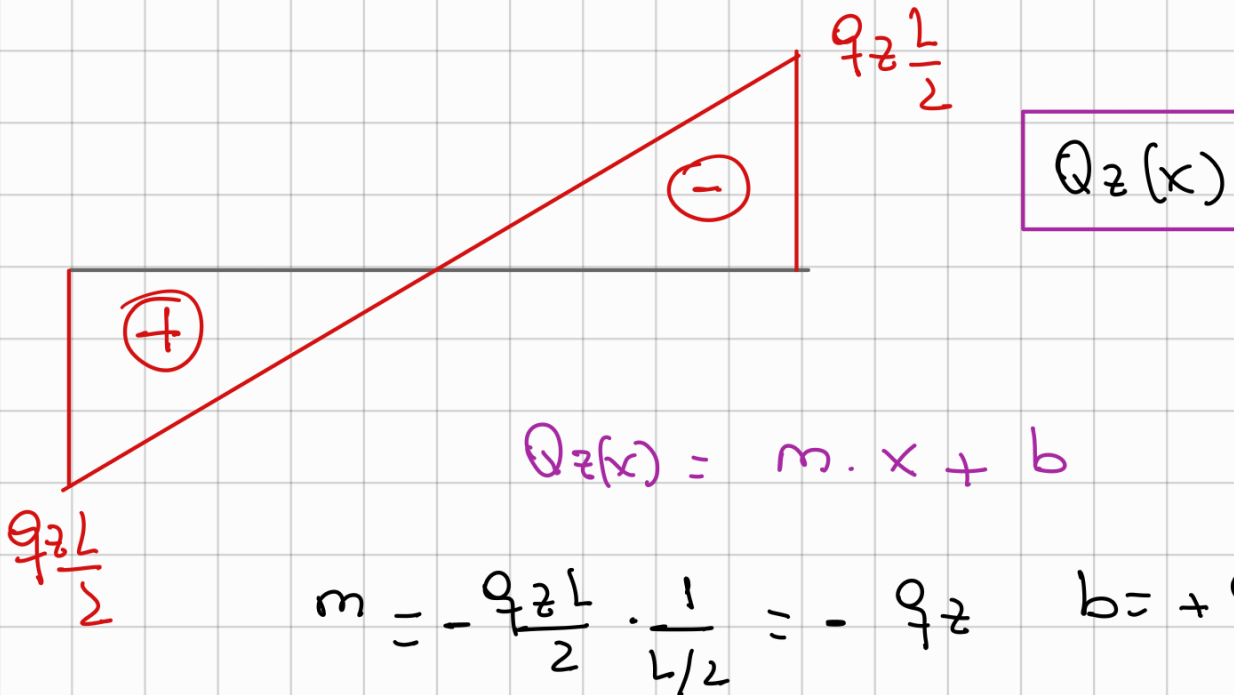
DESPLAZAMIENTO POR CORTE:

$$dw \Big|_{Q_z} = \frac{k_y Q_z}{G \cdot A} \cdot dx = dc_z$$

$$\frac{dw \Big|_{Q_z}}{dx} = \frac{k_y Q_z}{G \cdot A} = w'(x) \Big|_{Q_z} \quad \leftarrow$$

$w(x) \Big|_{Q_z}$: ES LA FUNCIÓN DE LA LÍNEA DE DEFORMACIÓN DEBIDA AL Q_z .

$w(x)|_{M_y} =$ es la función de la variación de deformación debida al M_y



$$Q_z(x) = -q_z \cdot x + \frac{q_z L}{2} = q_z \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

$$w'(x)|_{Q_z} = \frac{\kappa_z}{GA} \cdot q_z \left(\frac{L}{2} - x \right) \rightarrow \text{integral}$$

$$w(x)|_{Q_z} = \frac{\kappa_z q_z}{G \cdot A} \left(\frac{L}{2} x - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$w_{\max}|_{Q_z} = w\left(\frac{L}{2}\right)|_{Q_z} = \frac{1,2 \cdot q_z}{G \cdot A} \left[\frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \frac{L^2}{4} \right]$$

$$w_{\max}|_{Q_z} = \frac{1,2}{8} \frac{q_z L^2}{GA}$$

COMPARACIÓN $w_{\max}|Q_2$ con $w_{\max}|M_2$:

$$\frac{w_{\max}|Q_2}{w_{\max}|M_2} = \frac{\frac{1,2 Q_2 L^2}{8 \cdot G \cdot A}}{\frac{5}{384} \frac{Q_2 \cdot L^4}{E I_2}} = \frac{1,2 \cancel{Q_2} L^2}{8 \cdot G \cdot A} \cdot \frac{384 E I_2}{\cancel{Q_2} \cdot L^4}$$

$$E = 20000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad \mu = 0,25 \quad \rightarrow \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)} = 8000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\frac{w_{\max}|Q_2}{w_{\max}|M_2} = \frac{1,2 \cdot 384}{8} \cdot \frac{20000}{8000} \cdot \frac{L^3}{12 L^4} \cdot \frac{1}{L^2}$$

2,40

$$\frac{w_{\max}|Q_2}{w_{\max}|M_2} = 2,40 \cdot \frac{L^2}{L^2} = 2,40 \cdot \left(\frac{L}{L}\right)^2 = \frac{2,40}{\left(\frac{L}{L}\right)^2}$$

BARRAS ESBELTAS $\rightarrow \frac{L}{h} \gg 10$

E =	20000
μ =	0,25
G =	8000
κ_y =	1,20
a =	2,40

L / h =	2	4	6	8	10	12	16
$w_{MÁX,Qz} / w_{MÁX,My} =$	0,600	0,150	0,067	0,038	0,024	0,017	0,009
	60,00%	15,00%	6,67%	3,75%	2,40%	1,67%	0,94%

→
BARRAS
ESBELTAS