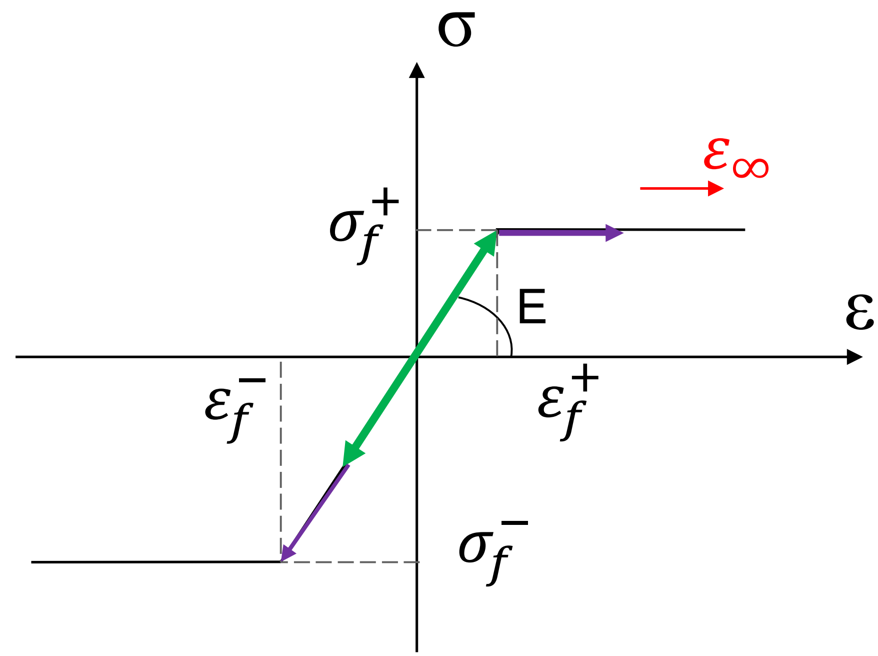
Análisis Elastoplástico – Solicitación a Flexión



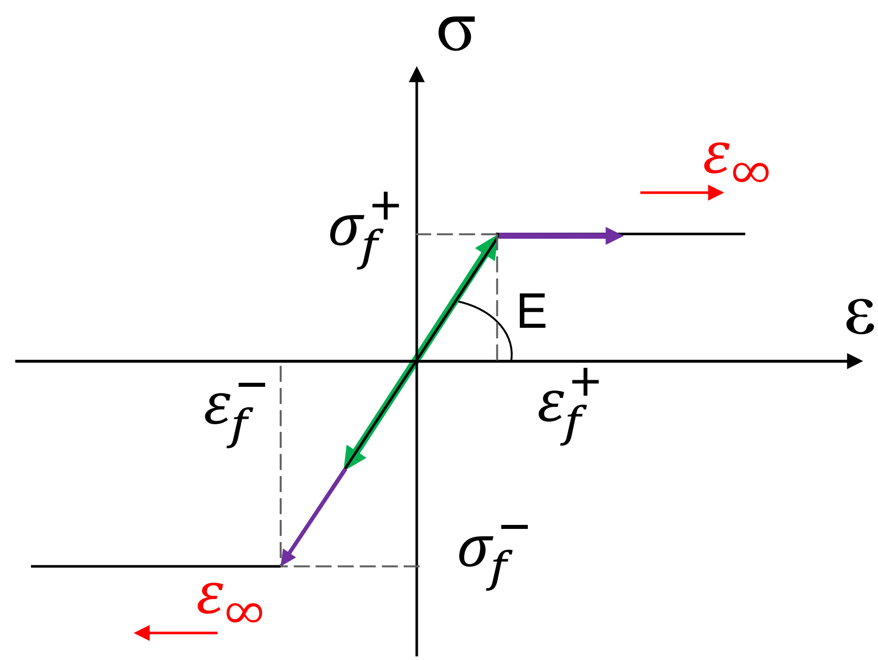
Tania Poletilo – Augusto La Colla – Manuela Medina – Constanza Ruffinelli – Marcos Spinella

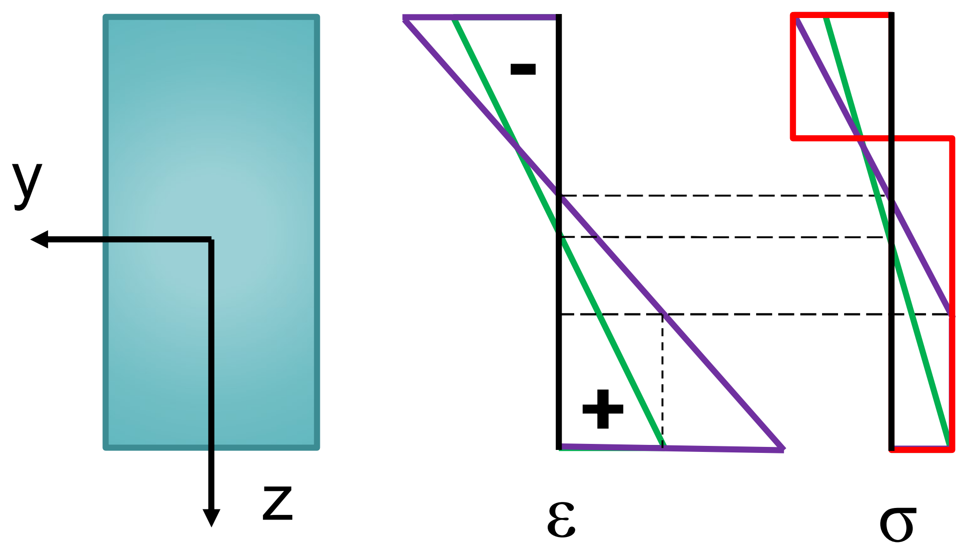
Universidad de Buenos Aires

Estabilidad II

Repaso teórico

- Flexión Simple





Plastificación parcial

Plastificación total

Repaso teórico

- Flexión Simple

$$\cancel{\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} \cdot z}$$

No es válido!

Hipótesis usadas

- ~~HLM~~
- HLC
- HLE
- Hipótesis de Bernoulli (Secciones planas)

$$N = \int \sigma_x \, dA = 0$$

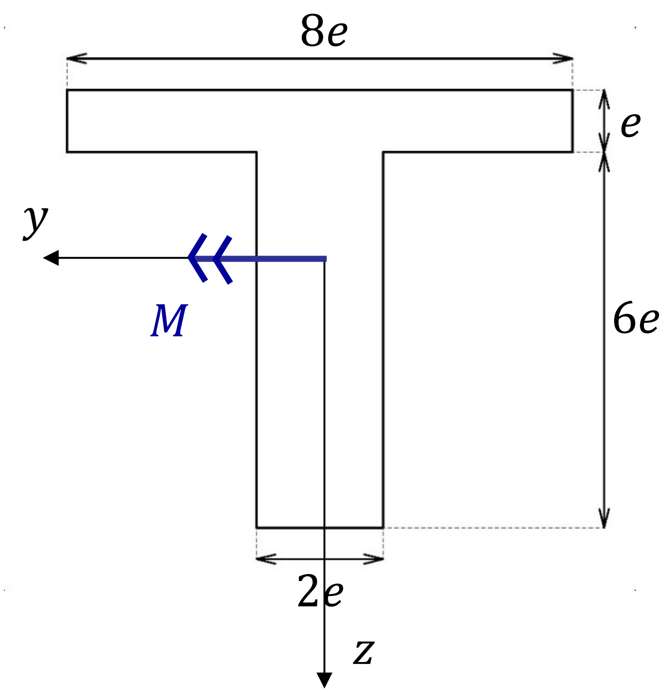
$$M_y = \int \sigma_x \cdot z \, dA$$

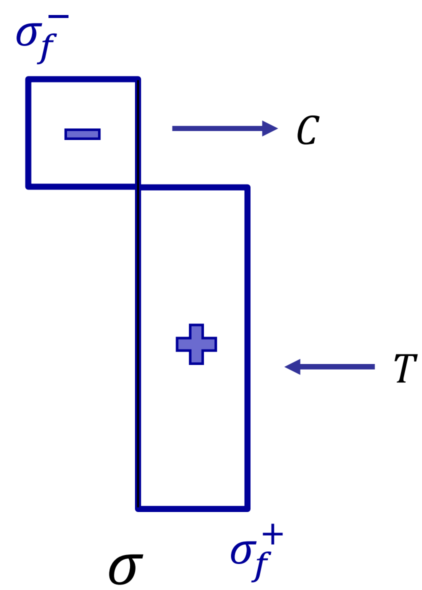
Ecuaciones de equivalencia → Siempre se cumplen

Ejercicio:

- Calcular el momento de plastificación total de la sección

$\sigma_f^+ = \sigma_f^- = 24 \dfrac{kN}{cm^2}$ $\quad E^+ = E^- = 8000 \dfrac{kN}{cm^2}$ $\quad$ Material ideal $\quad e = 2 \text{ cm}$





Ecuaciones de equivalencia

$$N = \int \sigma \, dA = T - C = 0$$

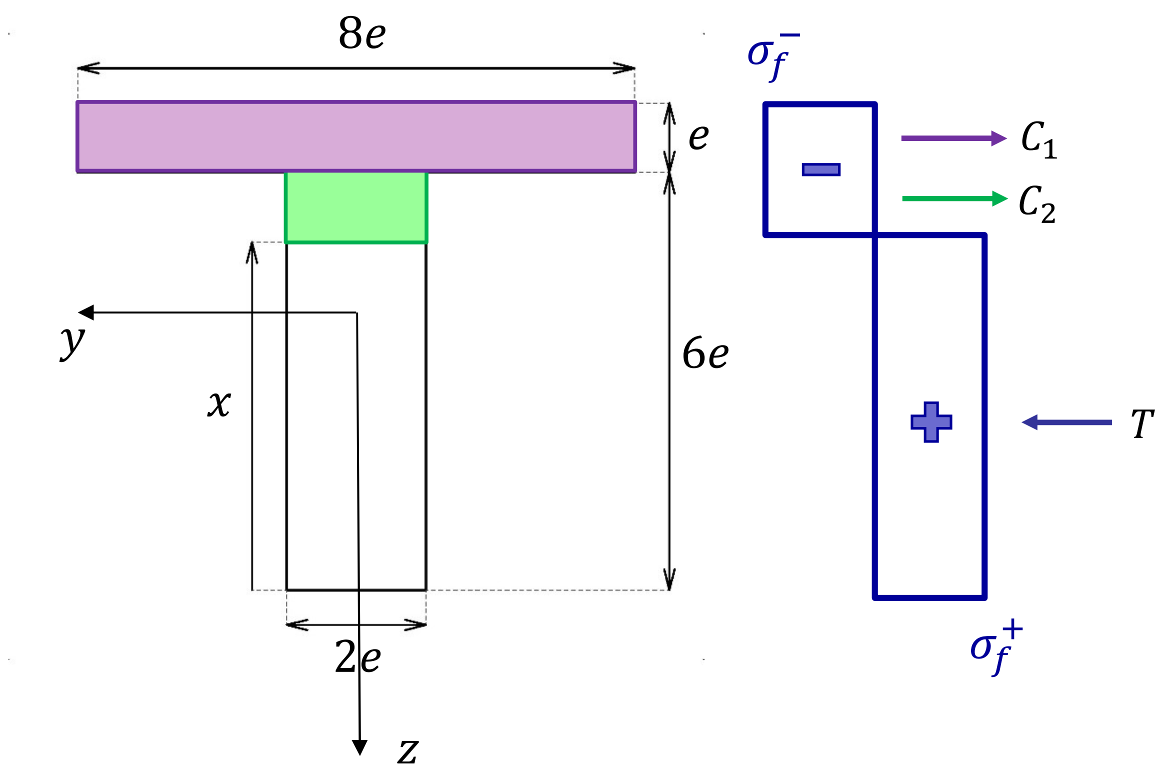
$$M_c = \int \sigma \cdot z \, dA$$

$$T = \int \sigma_f^+ \, dA$$

$$C = \int \sigma_f^- \, dA$$

$$\xrightarrow[T = C]{} \quad \sigma_f^+ \cdot A^+ = \sigma_f^- \cdot A^- \quad \Rightarrow \quad A^+ = A^-$$

Solo valido porque $\sigma_f^+ = \sigma_f^-$



$$e = 2 \text{ cm}$$

$$A^+ = A^-$$

$$A_T = (8e \cdot e) + (6e \cdot 2e)$$

$$A_T = 20 \cdot e^2 = 80\ cm^2$$

$$A^+ = A^- = \frac{A_T}{2} = 40\ cm^2$$

- Área traccionada

$$A^+ = x \cdot 2e = \frac{A_T}{2} = 10 \cdot e^2$$

$$x = 5 \cdot e = 10\ cm$$

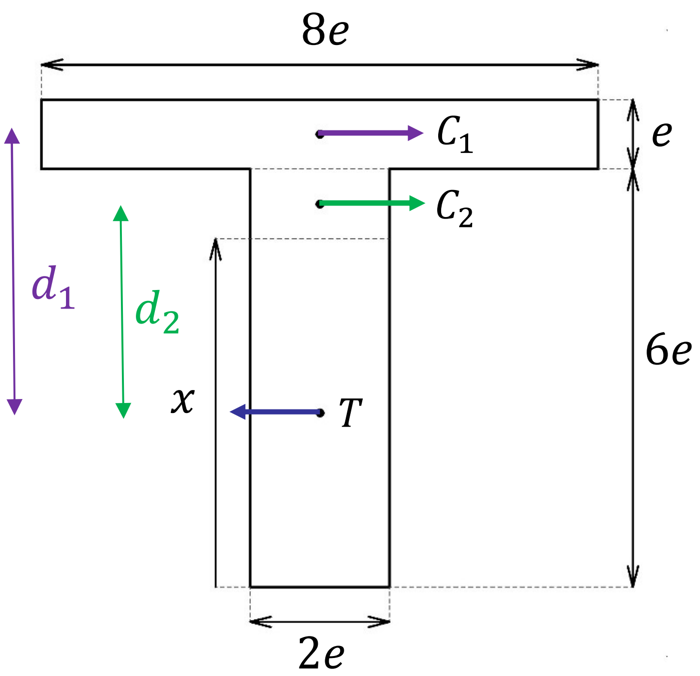
Distancia a la cual cambian de signo las tensiones

- Área comprimida

$$A^- = A_1^- + A_2^-$$

$$A_1^- = 8\,e \cdot e = 8 \cdot e^2 \qquad A_1^- = 32\ cm^2$$

$$A_2^- = 2e \cdot (6e - x) = 2 \cdot e^2 \qquad A_2^- = 8\ cm^2$$



$$M_c = \int \sigma \cdot z \, dA$$

Ecuaciones de equivalencia baricéntricas!

¿Es necesario determinar la posición del baricentro?

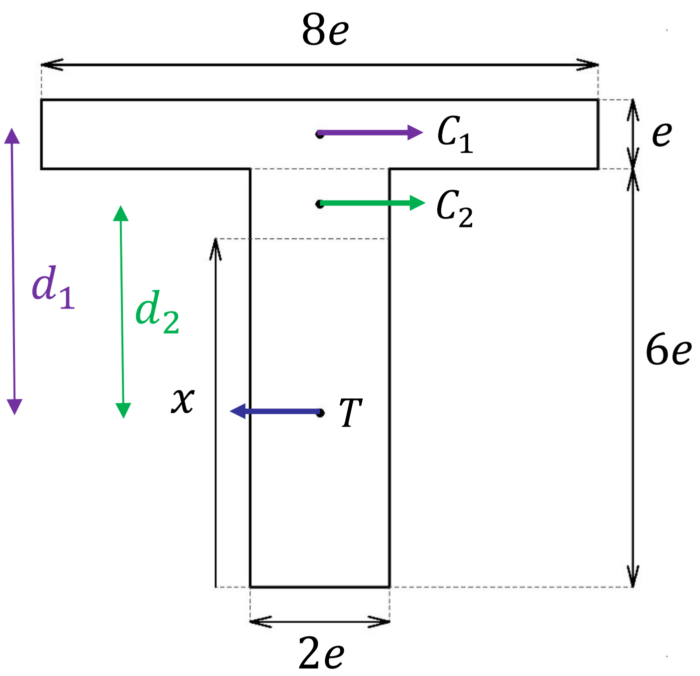
No, C y T al ser iguales forman una cupla, solo es necesaria la distancia entre ambas fuerzas

$C = T \Rightarrow$ Cupla

¡Si es flexión compuesta no es válido!

Formas de calcular el momento

- Momentos desde baricentro $\Rightarrow$ $M_c = \int \sigma \cdot z \, dA$
- Momento respecto a otro punto. Por ejemplo él punto de aplicación de T $\Rightarrow$ $M_c = C_1 \cdot d_1 + C_2 \cdot d_2$



- Suma de dos cuplas con C_1 y C_2

$$M_c = C_1 \cdot d_1 + C_2 \cdot d_2$$

$$d_1 = \frac{x}{2} + (6e - x) + \frac{e}{2} = 4 \cdot e \qquad d_1 = 8\ cm$$

$$d_2 = \frac{x}{2} + \frac{(6e - x)}{2} = 3 \cdot e \qquad d_2 = 6\ cm$$

$$C_1 = \sigma_f^- \cdot A_1^- = 24\ \frac{kN}{cm^2} \cdot 32\ cm^2 \qquad C_1 = 768\ kN$$

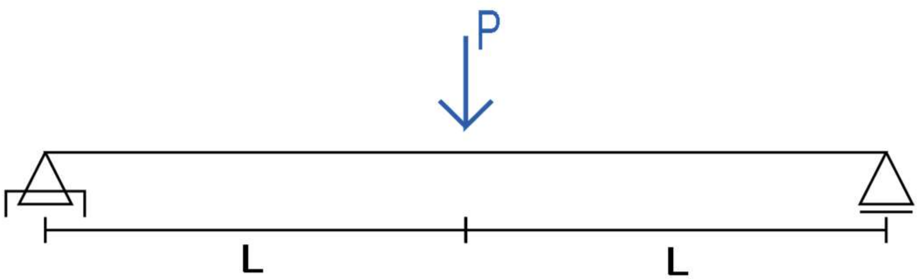
$$C_2 = \sigma_f^- \cdot A_2^- = 24\ \frac{kN}{cm^2} \cdot 8\ cm^2 \qquad C_2 = 192\ kN$$

$$M_c = C_1 \cdot d_1 + C_2 \cdot d_2$$

$$M_c = 768\ kN \cdot 8\ cm + 192\ kN \cdot 6\ cm \Rightarrow \boxed{M_c = 7296\ kN\ cm}$$

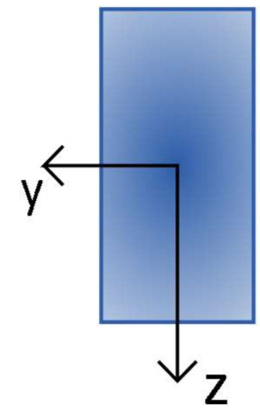
Ejercicio:

- Calcular P de encuentro plástico
- Calcular P de colapso

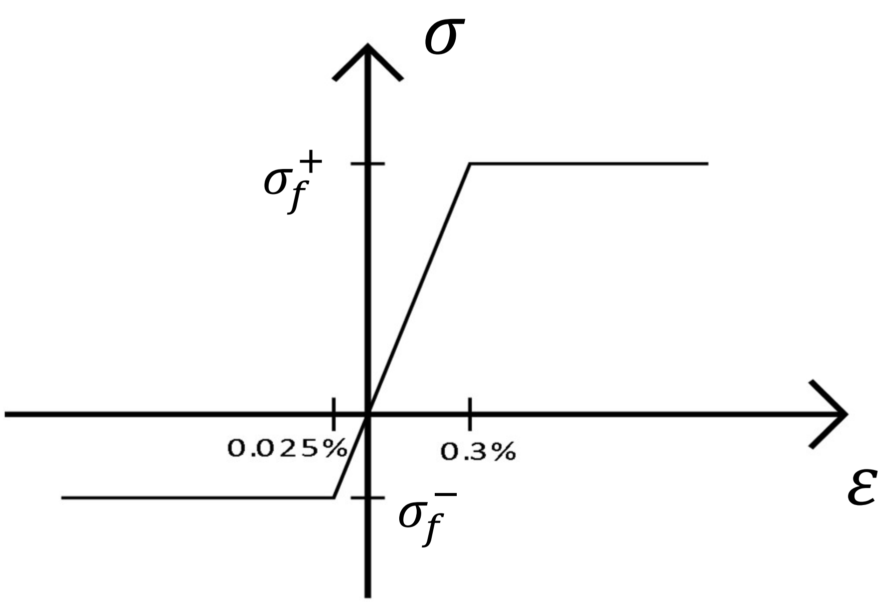


$L = 2\ m$

$b = 20\ cm$



$h = 50\ cm$



$$E = 8000\ \frac{kN}{cm^2}$$

$\varepsilon_f^+ = 0{,}3\ \%$ $\varepsilon_f^- = 0{,}025\ \%$

Resolución:

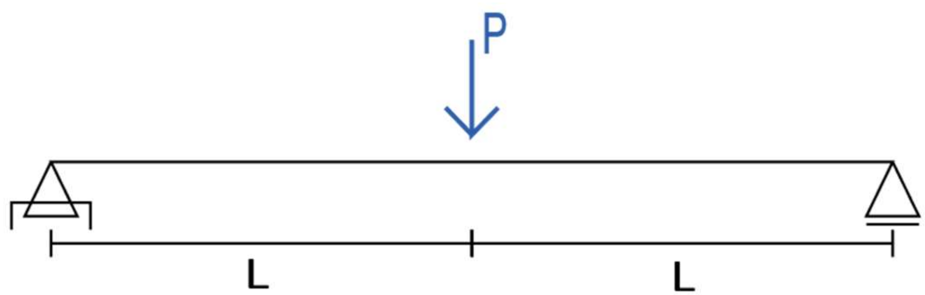
- Del gráfico tensión – Deformación

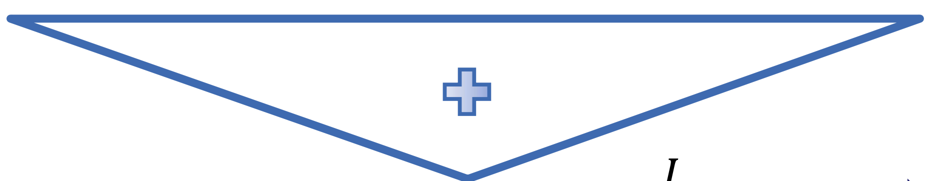
$$\sigma_f^+ = E \cdot \varepsilon_f^+ = 8000\ \frac{kN}{cm^2} \cdot 0{,}3\%$$

$$\sigma_f^+ = 24\ \frac{kN}{cm^2}$$

$$\sigma_f^- = E \cdot \varepsilon_f^- = 8000\ \frac{kN}{cm^2} \cdot 0{,}025\%$$

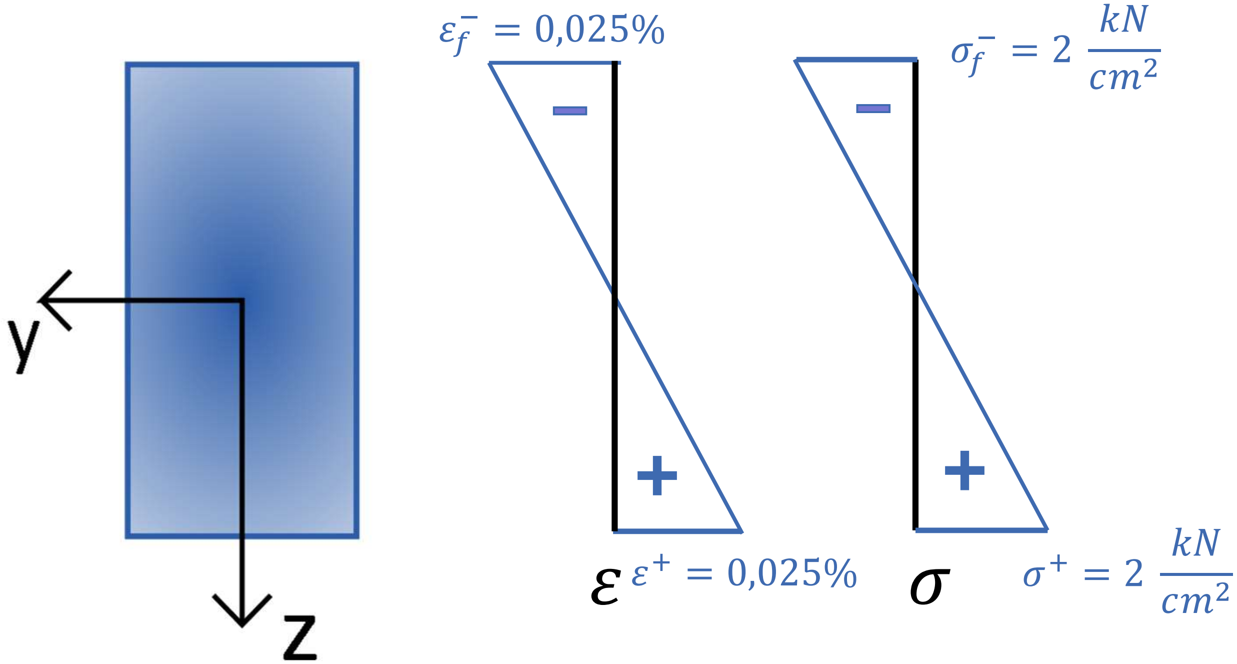
$$\sigma_f^- = 2\ \frac{kN}{cm^2}$$





$$M = P \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow P = \frac{2 \cdot M}{L}$$

P de encuentro plástico



$$\sigma_f^- < \sigma_f^+$$

Plastifica primero la fibra más comprimida

Valido solo en régimen elástico

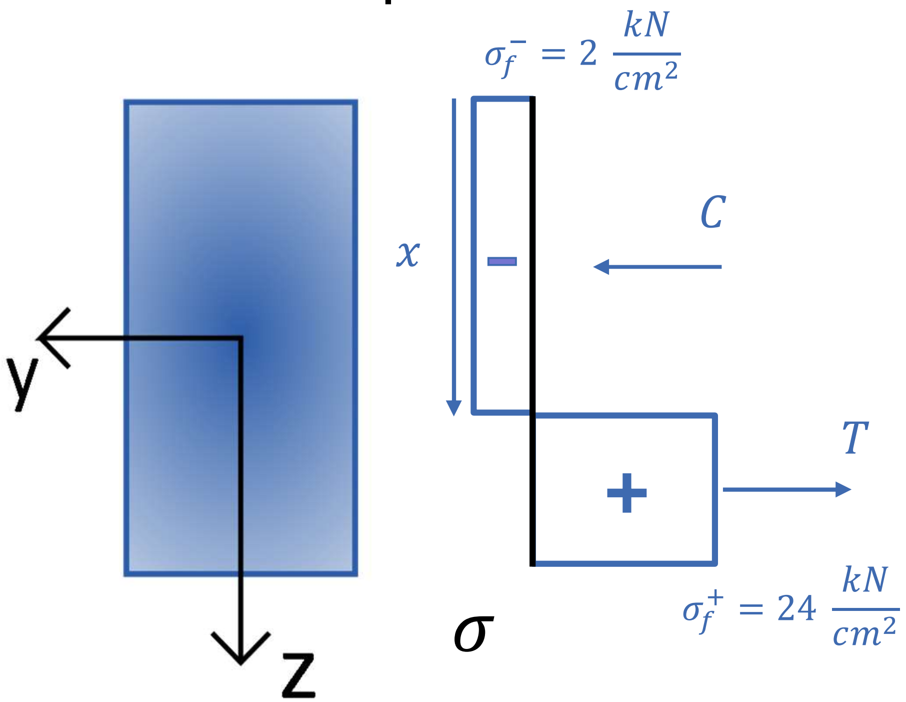
$$\sigma_f = \frac{M_e}{J_y} \cdot z \quad \Rightarrow \quad M_e = \frac{\sigma_f \cdot J_y}{z} = \frac{\sigma_f}{h/2} \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$M_e = 166{,}6\ kN\ m \quad \Rightarrow \quad P_e = \frac{M_e \cdot 2}{L} = 166{,}6\ kN$$

¿Cual es el valor de la curvatura?

$$\chi = \frac{M_e}{E \cdot J_y} = \frac{0{,}025\%}{0{,}5\ h} = 1 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{cm}$$

- P de colapso



El esfuerzo axil es nulo ⇒ $N = \int \sigma\, dA = T - C = 0$

$$C = \sigma_f^- \cdot x \cdot b$$

$$T = \sigma_f^+ \cdot (h - x) \cdot b$$

$T = C$ ⇒ $x = 46{,}154\ cm$

- Calculando momentos desde baricentro

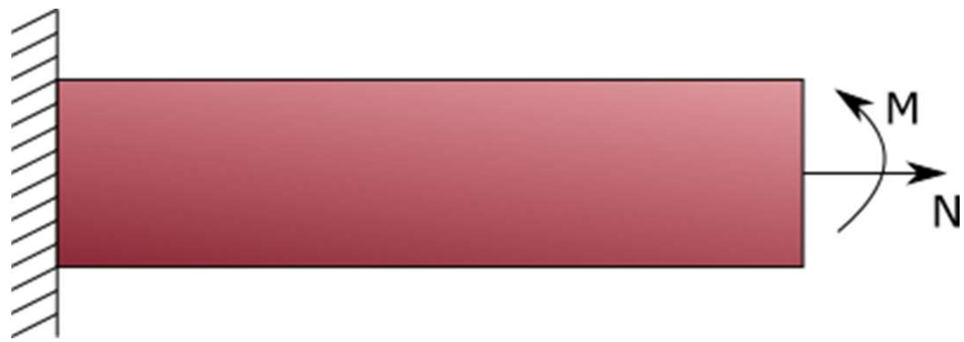
$$M_c = \int \sigma \cdot z\, dA \Rightarrow M_c = C \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{x}{2}\right) + T \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{(h-x)}{2}\right)$$

$$M_c = 461{,}54\ kN\ m \Rightarrow P_c = \frac{M_c \cdot 2}{L} = 461{,}54\ kN$$

¿Cual es el valor de la curvatura? ⇒ $\chi \to \infty$

Repaso teórico

- Flexión compuesta



Para Flexión recta

$$M_y = \int \sigma_x \cdot z \, dA$$

$$N = \int \sigma_x \, dA$$

En flexión compuesta $N \neq 0$

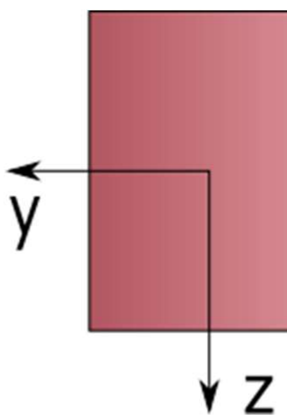
En flexión simple, el momento de plastificación era único

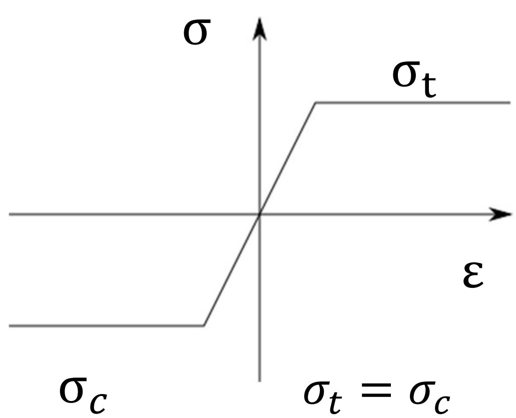
En flexión compuesta hay **infinitas combinaciones de "N" y "M"** que conducen a la plastificación total

Para poner de manifiesto éstas infinitas combinaciones se construyen diagramas (o curvas) de interacción que encierran todos los estados posibles de solicitación de una determinada sección.

Diagramas de Interacción

Caso particular



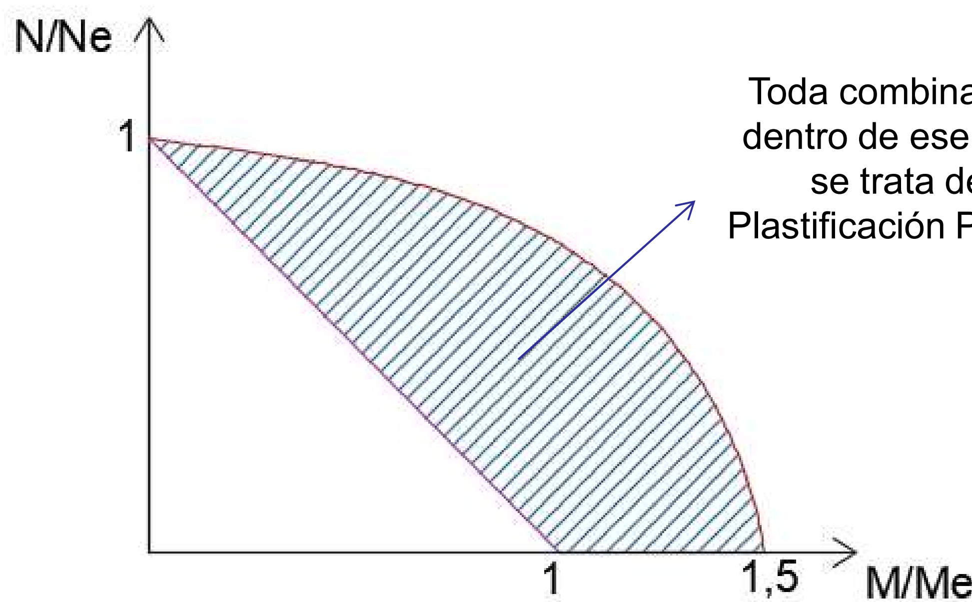


$$\frac{N}{N_e} + \frac{M}{M_e} = 1$$

Cualquier combinación de N y M que satisfaga ésta ecuación se encuentra en el límite elástico.

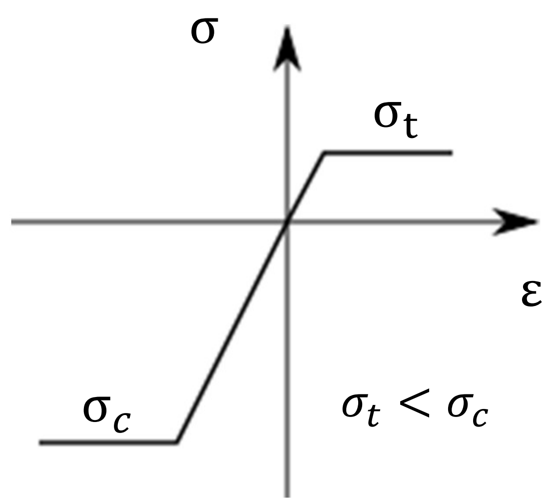
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{M}{M_e} + \frac{N^2}{N_e^2} = 1$$

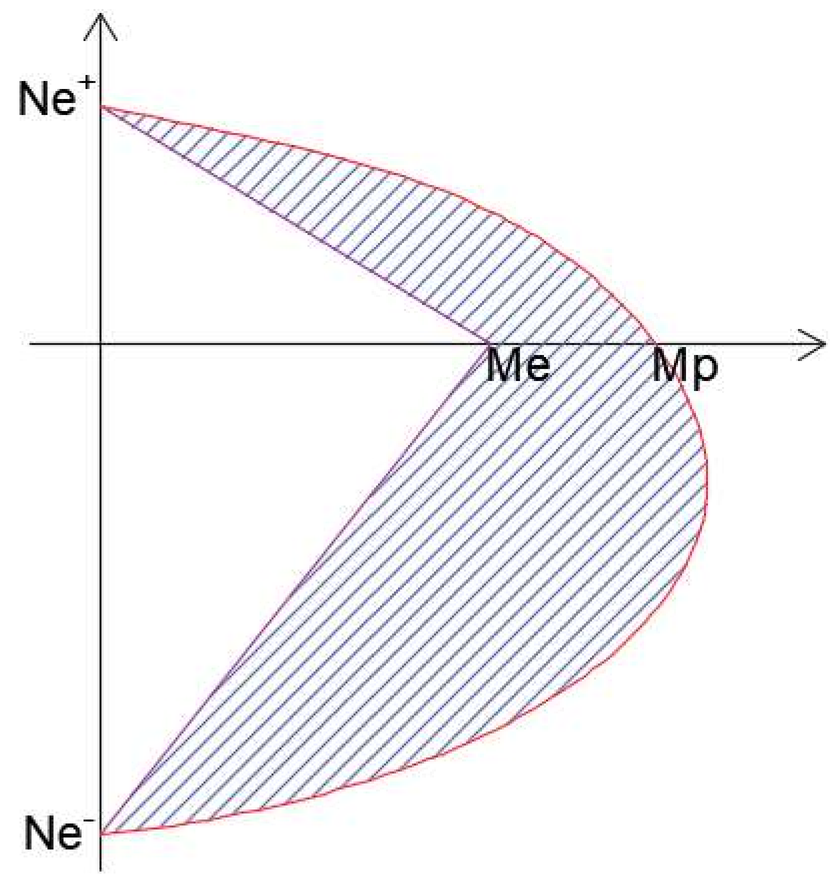
Cualquier combinación de N y M que satisfaga ésta ecuación, representa un estado de plastificación total



Toda combinación dentro de ese área se trata de Plastificación Parcial

¿El mayor momento posible es siempre el que se obtiene por flexión simple?
¿Cómo afecta el esfuerzo axil?



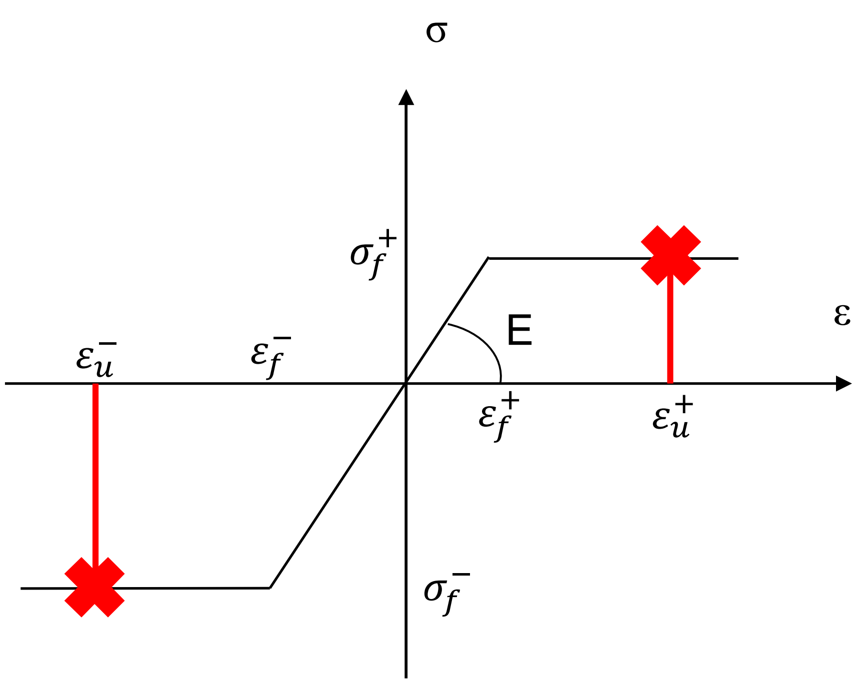


Al aplicar un esfuerzo axil de compresión, disminuirán las tensiones de tracción debidas a la flexión, haciendo que la sección resista un momento mayor al momento de plastificación total calculado para flexión simple.

Material elastoplástico real

Los materiales reales no pueden deformarse infinitamente, sino que presentan una deformación última

Ese límite puede ser rotura real o convencional

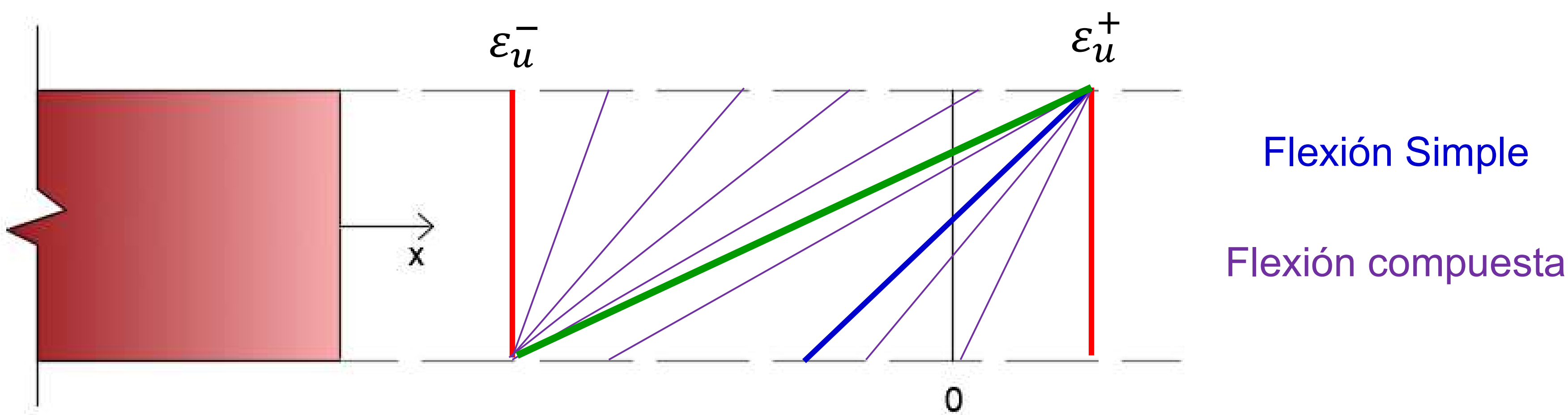


Esto quiere decir tanto que el material luego de esa deformación se rompa como que convencionalmente se establezca que superada esa deformación el estado resulta inadmisible para el fin para el cuál fue diseñada

Planos límites

- Definición: Un plano límite es aquel para el cuál se alcanza, en alguna fibra de la sección, la deformación específica última

Esfuerzo axil último → todos los puntos de la sección alcanzan la deformación última

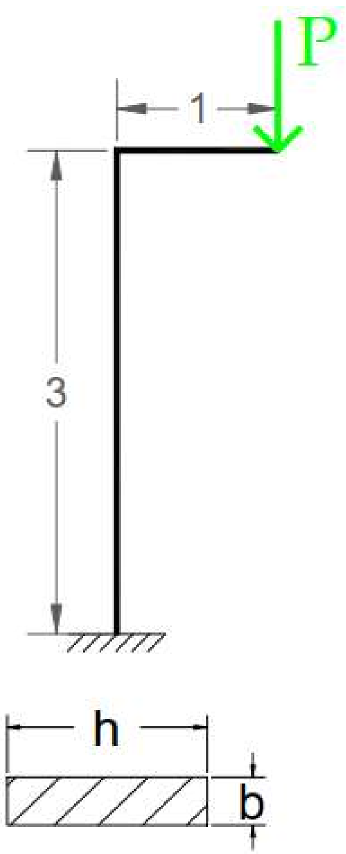


¿Qué planos correspondientes a flexión compuesta tienen esfuerzo de tracción? ¿Cuáles de compresión? ¿Es posible saberlo?

¿Cuál es el plano que representa la combinación de solicitaciones que máxima el momento resistente de la sección?

Ejercicio: Calcular la máxima carga P que puede soportar la columna a flexión compuesta:

a) Para elastoplástico ideal, con plastificación total.
b) Para elastoplástico ideal, con plastificación parcial del 10%
c) Para elastoplástico real



Datos de la Geometría

$b = 20\ cm$

$h = 80\ cm$

Sección Rectangular

$L_1 = 3\ m$ Longitud de la columna

$L_2 = 1\ \mathrm{m}$ Longitud de la ménsula

Datos Material

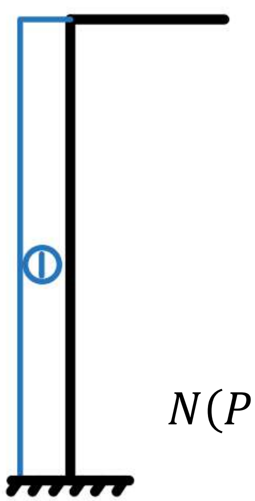
$\sigma_{fc} = 15\ MPa$ Tensión última a compresión para plano $\varepsilon_{fc} = 0{,}15\%$

$\sigma_{ft} = 0{,}5\ MPa$ Tensión última a tracción para plano $\varepsilon_{ft} = 0{,}005\%$

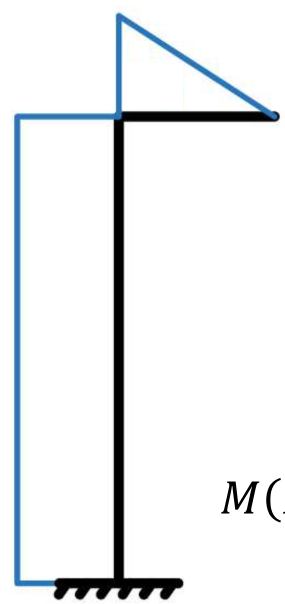
$\varepsilon_{uc} = 0{,}35\%$ Plano límite para EPR a compresión

$\varepsilon_{ut} = 0{,}35\%$ Plano límite para EPR a tracción

Resolución:

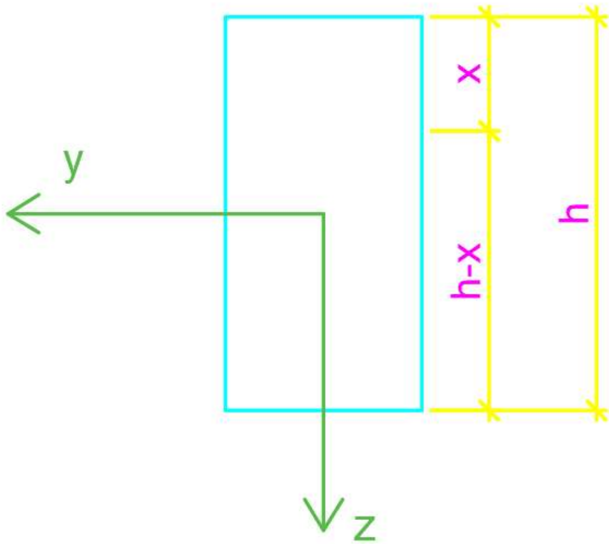


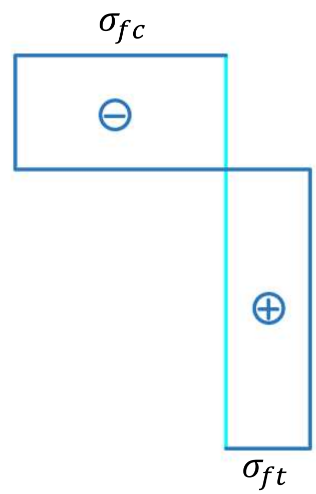
$N(P) = -P$

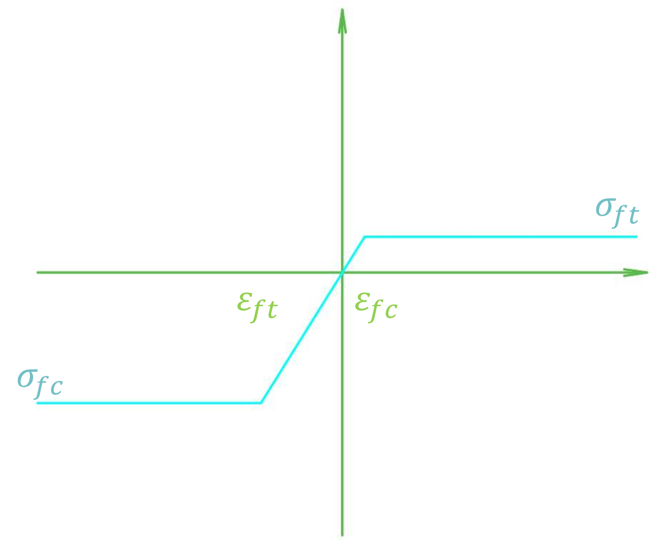


$M(P) = P \cdot L_2$

a) Elastoplástico Ideal - Plastificación Total







Si tomo momento desde la fibra inferior →

$$\begin{cases} N(x) = -\sigma_{fc} \cdot x \cdot b + \sigma_{ft} \cdot (h-x) \cdot b \\ M(x) = \sigma_{fc} \cdot x \cdot b \cdot \left(h - \frac{x}{2}\right) - \sigma_{ft} \cdot \frac{(h-x)^2}{2} \cdot b + \frac{h}{2} \cdot N(x) \end{cases}$$

¿Qué diferencia hay si tomo desde el baricentro?

$$M(x) = \sigma_{fc} \cdot x \cdot b \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{x}{2}\right) + \sigma_{ft} \cdot (h-x) \cdot b \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{h-x}{2}\right)$$

a) Elastoplástico Ideal - Plastificación Total

Ecuación de Equivalencia

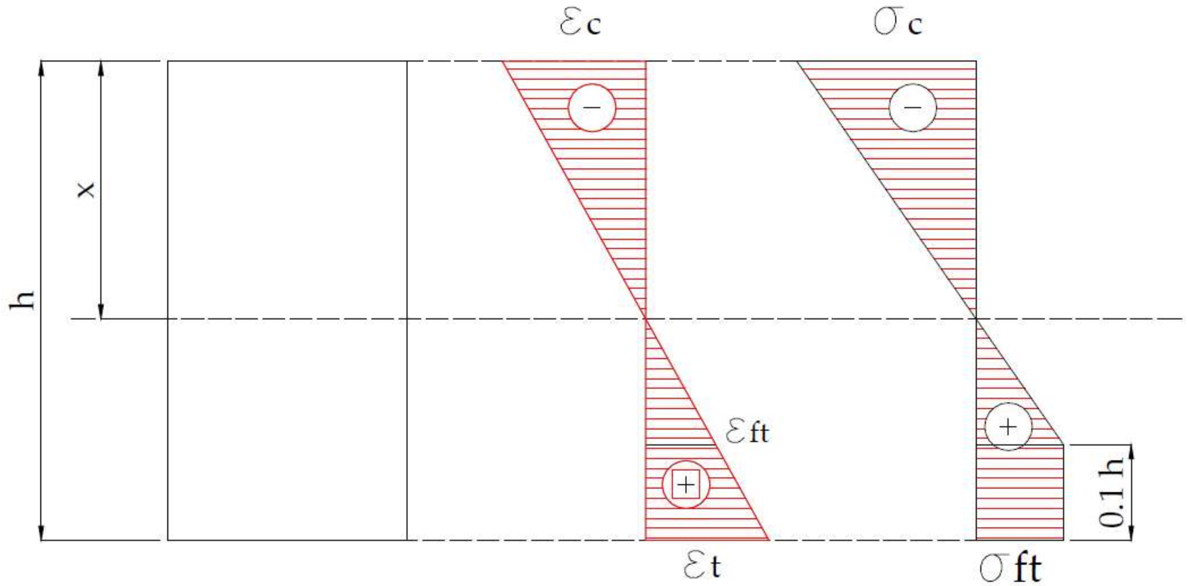
$$-P = -\sigma_{fc} \cdot x \cdot b + \sigma_{ft} \cdot (h - x) \cdot b$$

$$P \cdot L_2 = \sigma_{fc} \cdot x \cdot b \cdot \left(h - \frac{x}{2}\right) - \sigma_{ft} \cdot \frac{(h-x)^2}{2} \cdot b + \frac{h}{2} \cdot N(x)$$

$$P = 48{,}869\ kN$$

$$x = 4{,}157\ cm$$

b) Elastoplástico Ideal - Plastificación Parcial del 10%

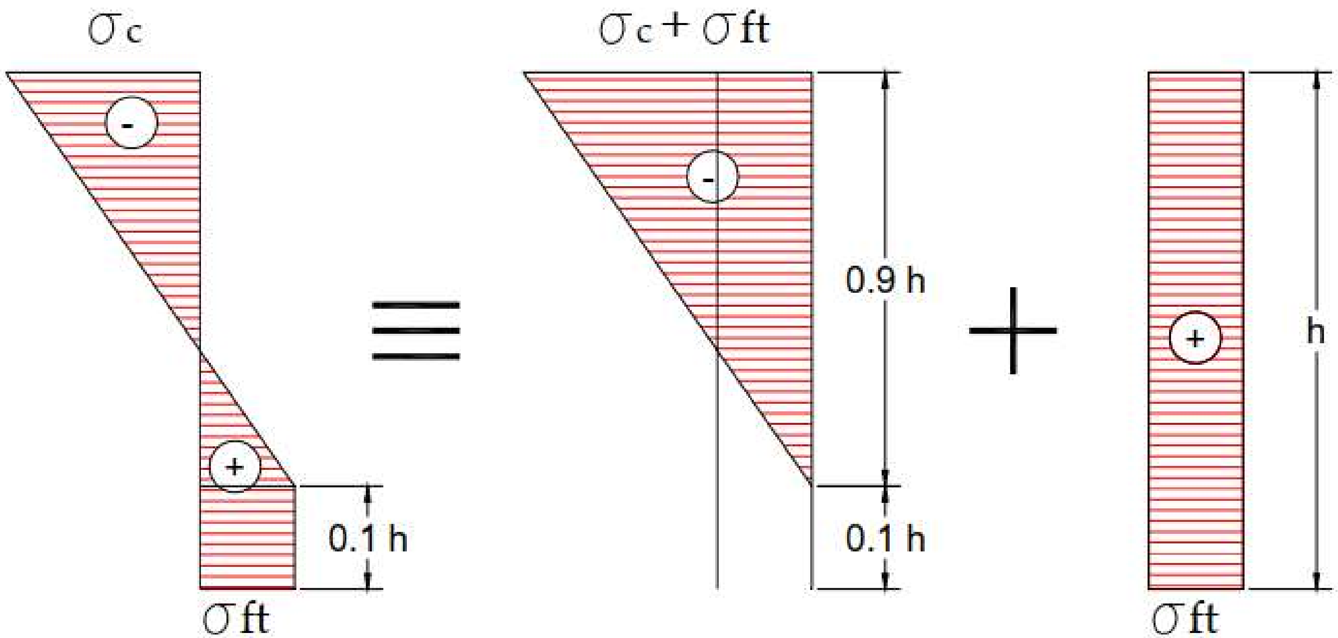


Semejanza de triángulos: $$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{\varepsilon_{ft}}{h - x - 0{,}1\,h} = \frac{\varepsilon_t}{h - x}$$

$$\varepsilon_t(x) = \frac{\varepsilon_{ft} \cdot (h - x)}{0{,}9\,h - x}$$

$$\varepsilon_c(x) = \frac{\varepsilon_{ft} \cdot x}{0{,}9\,h - x} \longrightarrow \sigma_c(x) = \frac{\sigma_{ft} \cdot x}{0{,}9\,h - x}$$

b) Elastoplástico Ideal - Plastificación Parcial del 10%



$$N(x) = \frac{-x \cdot b \cdot \sigma_c(x)}{2} + \frac{\sigma_{ft} \cdot (0{,}9h - x) \cdot b}{2} + \sigma_{ft} \cdot 0{,}1\,h \cdot b$$

$$M(x) = \frac{\left(\sigma_c(x) + \sigma_{ft}\right) \cdot 0{,}9h \cdot b}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{0{,}9h}{3}\right)$$

b) Elastoplástico Ideal - Plastificación Parcial del 10%

Ecuación de Equivalencia

$$-P = \frac{-x \cdot b \cdot \sigma_c(x)}{2} + \frac{\sigma_{ft} \cdot (0{,}9h - x) \cdot b}{2} + \sigma_{ft} \cdot 0{,}1h \cdot b$$

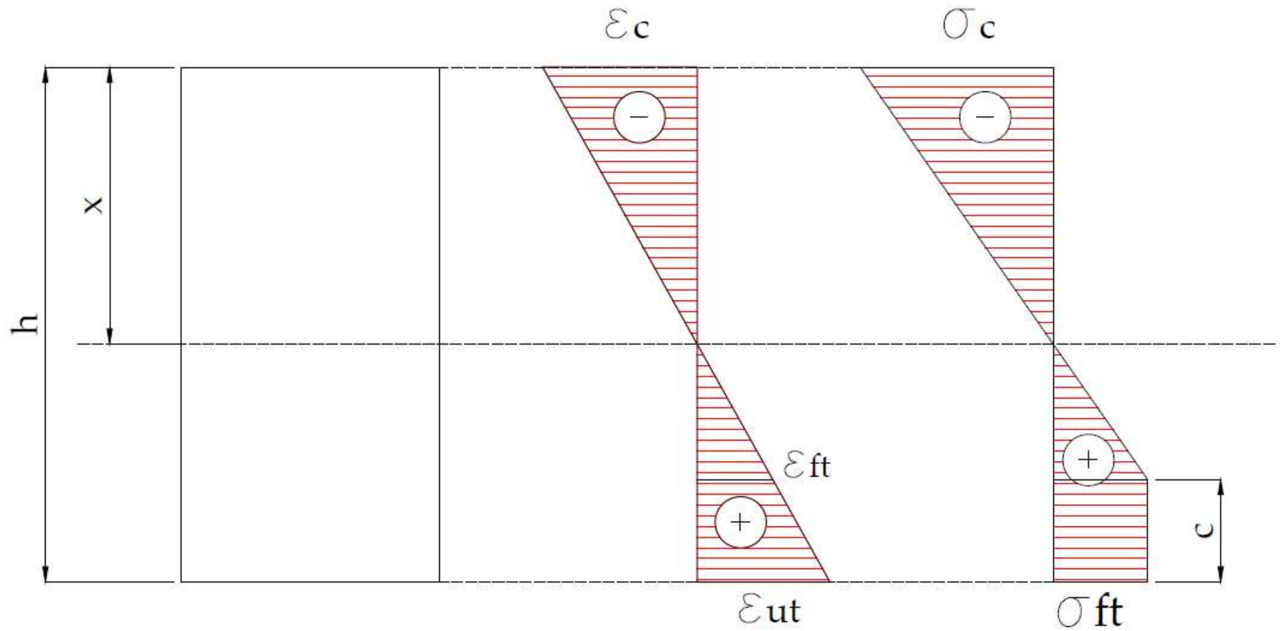
$$P \cdot L_2 = \frac{\left(\sigma_c(x) + \sigma_{ft}\right) \cdot 0{,}9h \cdot b}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{0{,}9h}{3}\right)$$

$$P = 15{,}238\ kN$$

$$x = 44{,}784\ cm$$

$\sigma_c(x) = 0{,}823\ MPa$ $\qquad$ $\varepsilon_c(x) = 0{,}0082\%$ $\qquad$ $\varepsilon_t(x) = 0{,}0065\%$

c) Elastoplástico Real – Plano límite

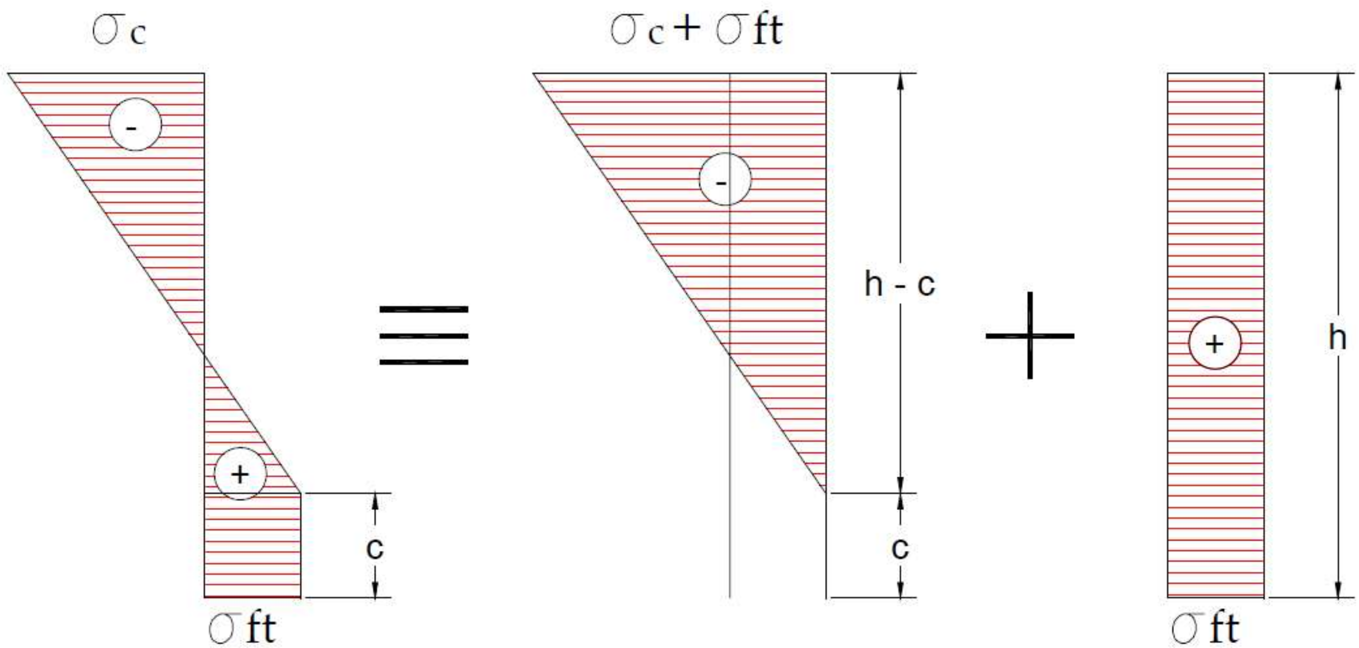


Semejanza de triángulos: $$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{\varepsilon_{ft}}{h-x-c} = \frac{\varepsilon_{ut}}{h-x}$$

$$\varepsilon_{ut} = \frac{\varepsilon_{ft}\cdot(h-x)}{h-x-c} \longrightarrow c(x) = \frac{-\varepsilon_{ft}\cdot(h-x)}{\varepsilon_{ut}} + h - x$$

$$\varepsilon_c(x) = \frac{\varepsilon_{ft}\cdot x}{h-x-c(x)} \longrightarrow \sigma_c(x) = \frac{\sigma_{ft}\cdot x}{h-x-c(x)}$$

c) Elastoplástico Real – Plano límite



$$N(x) = \frac{-x \cdot b \cdot \sigma_c(x)}{2} + \frac{\sigma_{ft} \cdot (h - x - c(x)) \cdot b}{2} + \sigma_{ft} \cdot c(x) \cdot b$$

$$M(x) = \frac{\left(\sigma_c(x) + \sigma_{ft}\right) \cdot (h - c(x)) \cdot b}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{h - c(x)}{3}\right)$$

c) Elastoplástico Real – Plano límite

Ecuación de Equivalencia

$$-P = \frac{-x \cdot b \cdot \sigma_c(x)}{2} + \frac{\sigma_{ft} \cdot (h - x - c(x)) \cdot b}{2} + \sigma_{ft} \cdot c(x) \cdot b$$

$$P \cdot L_2 = \frac{\left(\sigma_c(x) + \sigma_{ft}\right) \cdot (h - c(x)) \cdot b}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{h - c(x)}{3}\right)$$

$$P = 42{,}953\ kN$$

$$x = 14{,}258\ cm$$

$$\sigma_c(x) = 7{,}591\ MPa \qquad c(x) = 64{,}803\ cm = 0{,}81\ h$$