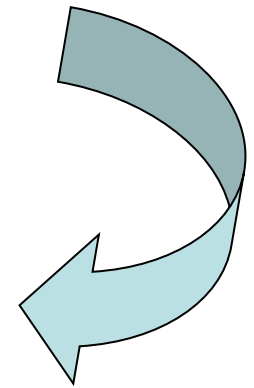


BARRAS EN REGIMEN ELASTO- PLÁSTICO

El modelo usado hasta el presente se basa en las siguientes hipótesis:

- $\exists$ LE Linealidad Estática
 - $\exists$ LC Linealidad Cinemática
 - $\exists$ LM Linealidad Mecánica
- $\exists$ PSE

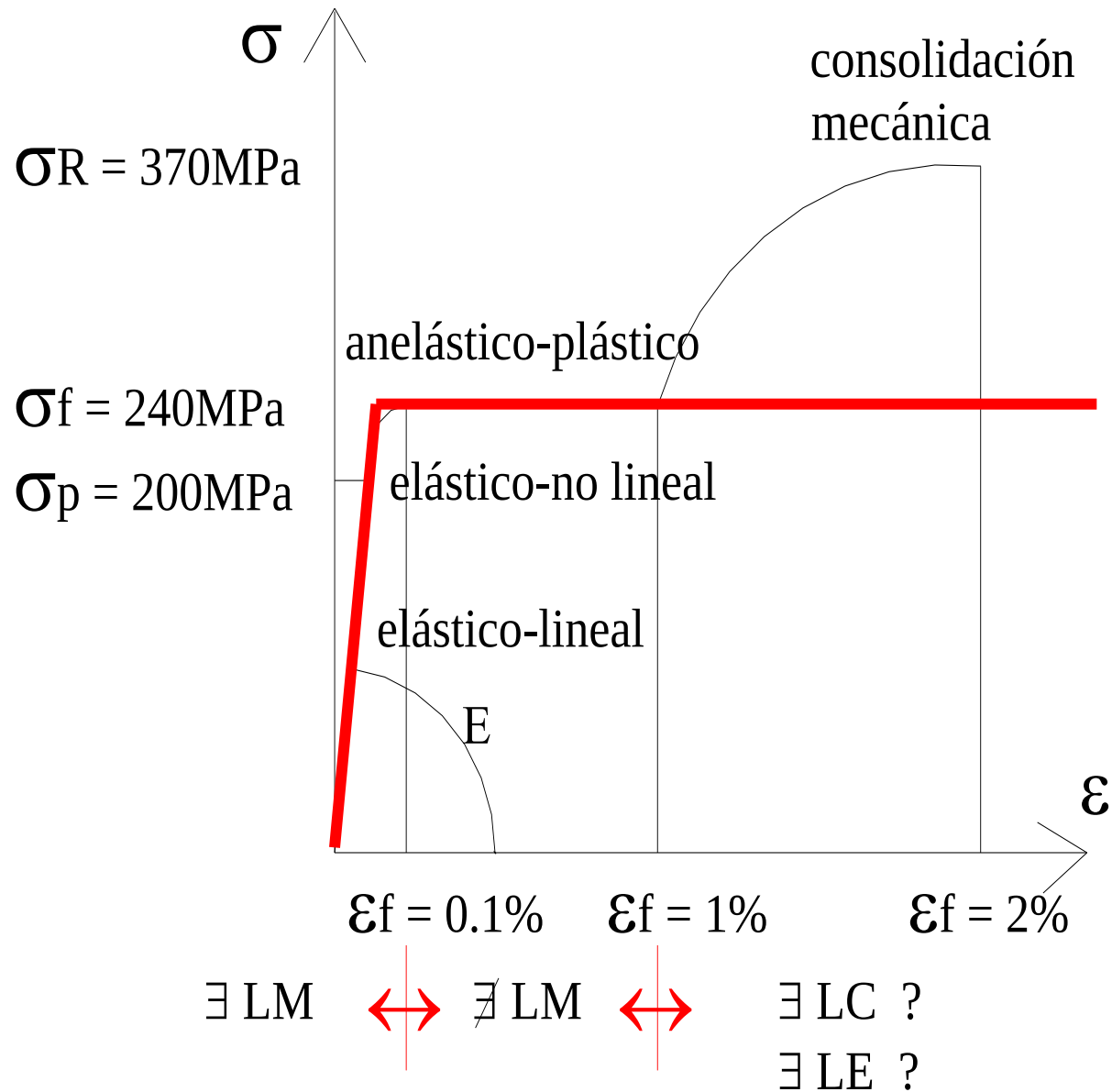


Principio de Superposición de Efectos

$e = k \cdot C$ proporcionalidad entre efectos y causas

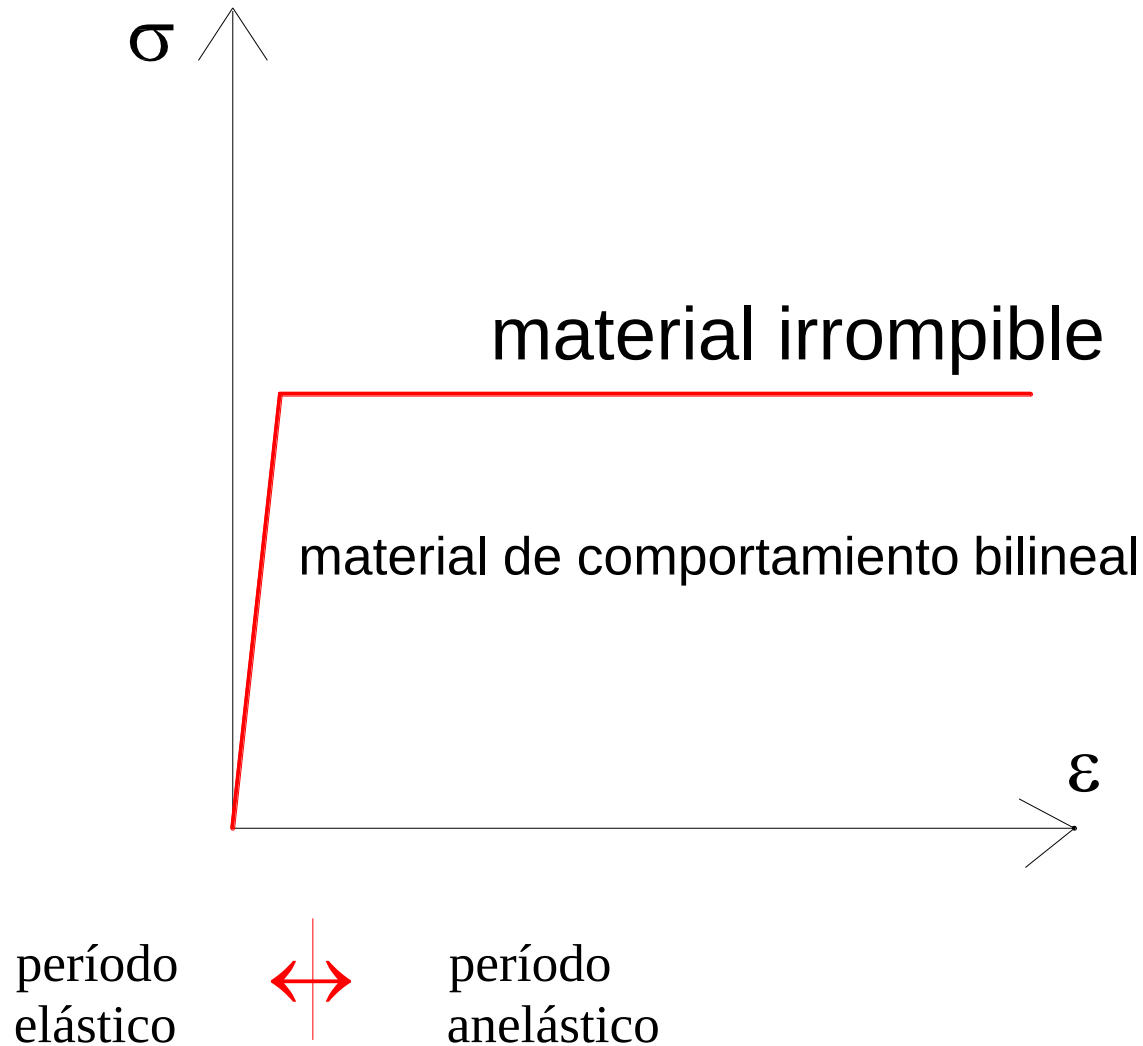
- $\exists$ HSP Secciones Planas (Bernouilli-Navier)
- $\exists$ PSV Principio de Saint-Venant

DIAGRAMA σ — ϵ DE UN ACERO DULCE



MATERIAL ELASTO-PLASTICO IDEAL

EPI



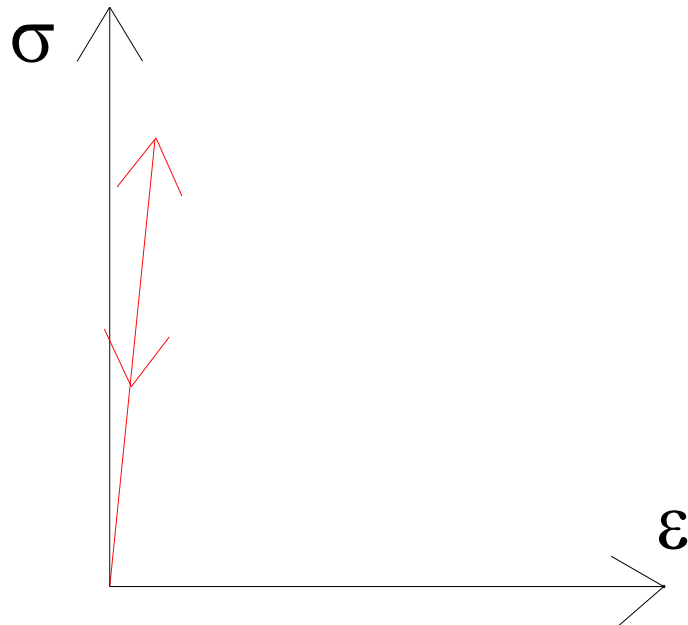
PROCESO DE CARGA Y DE DESCARGA

Deformación remanente

PERIODO ELASTICO

Carga = Descarga

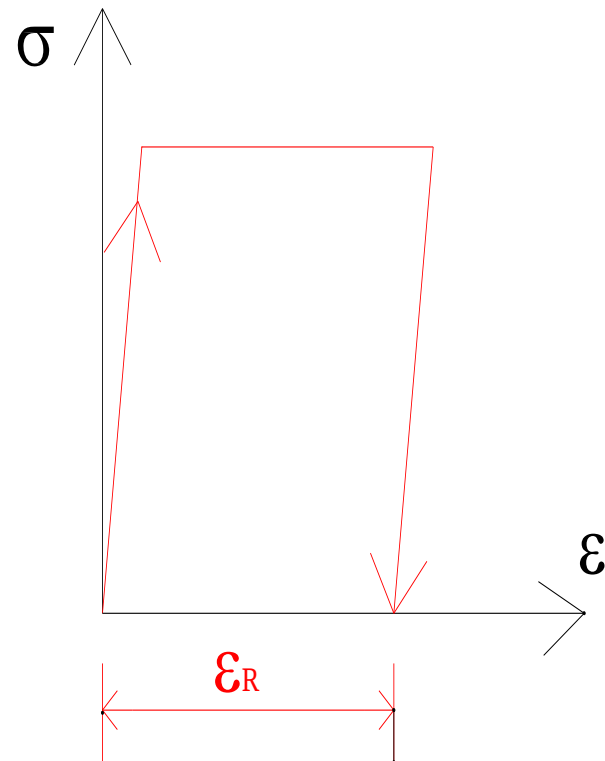
$$\epsilon_r = 0$$



PERIODO ANELASTICO

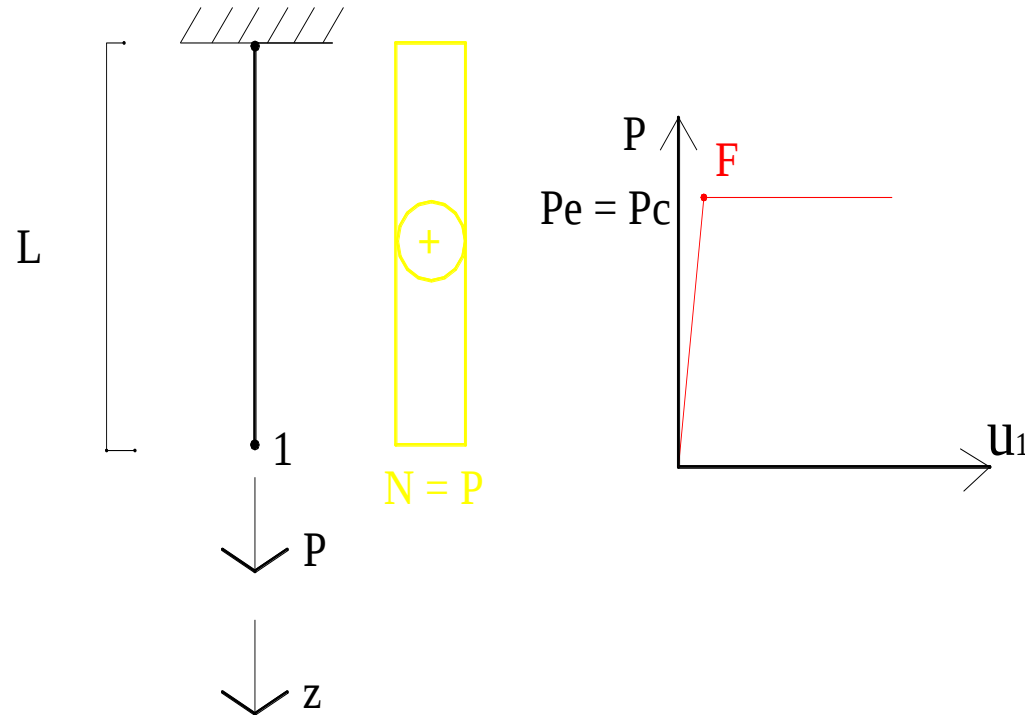
Carga $\neq$ Descarga

$$\epsilon_r \neq 0$$



BARRAS SOMETIDAS A ESFUERZO AXIL

BARRA SOMETIDA A TRACCION



Calculamos las tensiones y las deformaciones específicas

$$\sigma_z = P / F \quad \epsilon_z = u_1 / L$$

cuando $\sigma_z = \sigma_f = P_e / F$

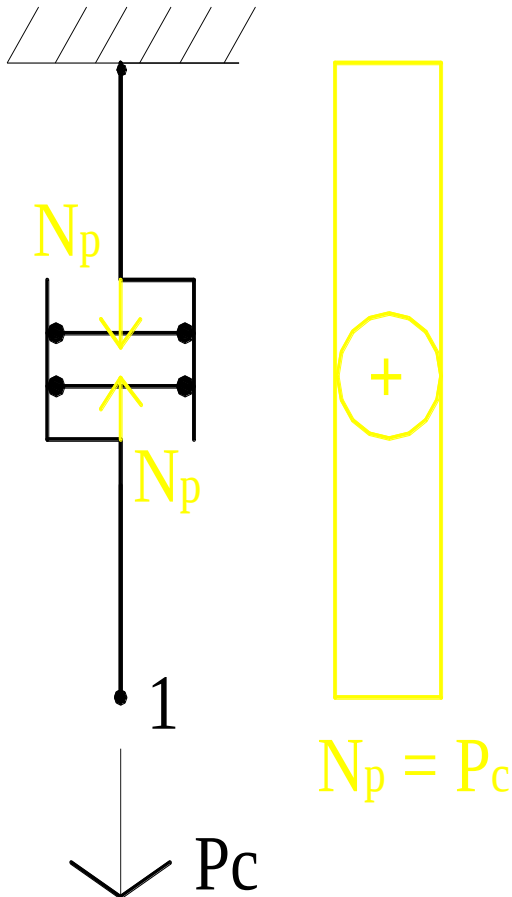
P_e = carga elástica o de encuentro plástico

A partir de la tensión de fluencia los alargamientos crecen sin que medie un incremento de carga

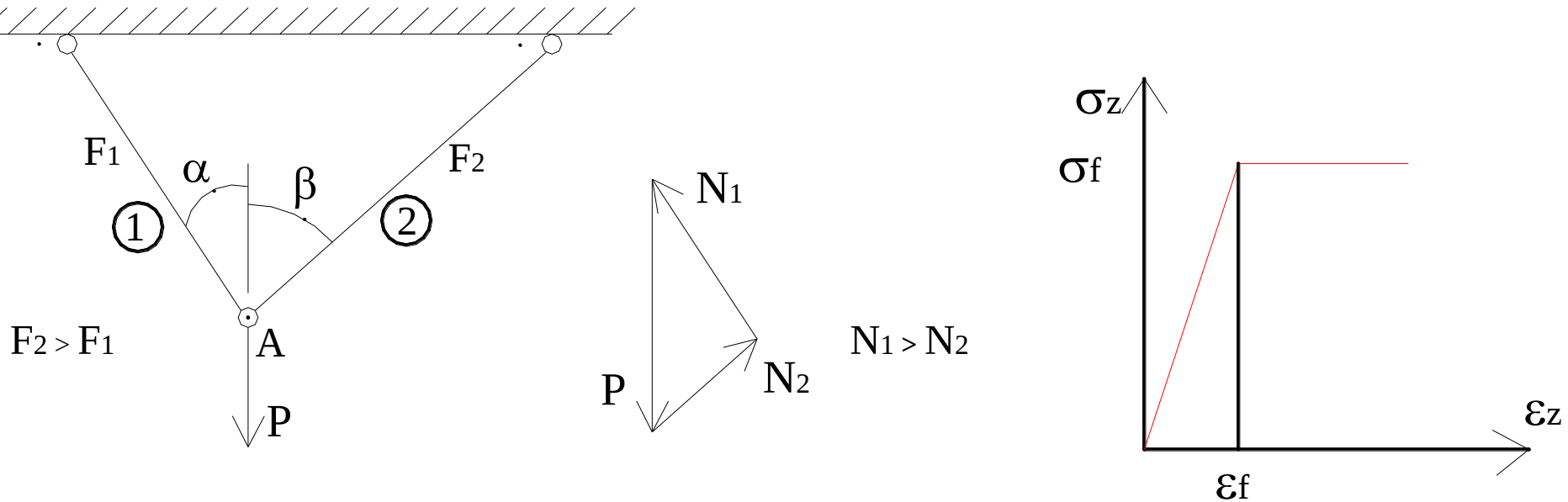
CARGA DE COLAPSO

- La estructura se convierte en un MECANISMO DE COLAPSO
- El sistema esta equilibrado SISTEMA EQUILIBRADO
- Cumple ADMISIBILIDAD PLASTICA $\forall \sigma_i \leq \sigma_f$

MODELO REPRESENTATIVO en el periodo anelástico



DOS BARRAS SOLICITADAS A TRACCION

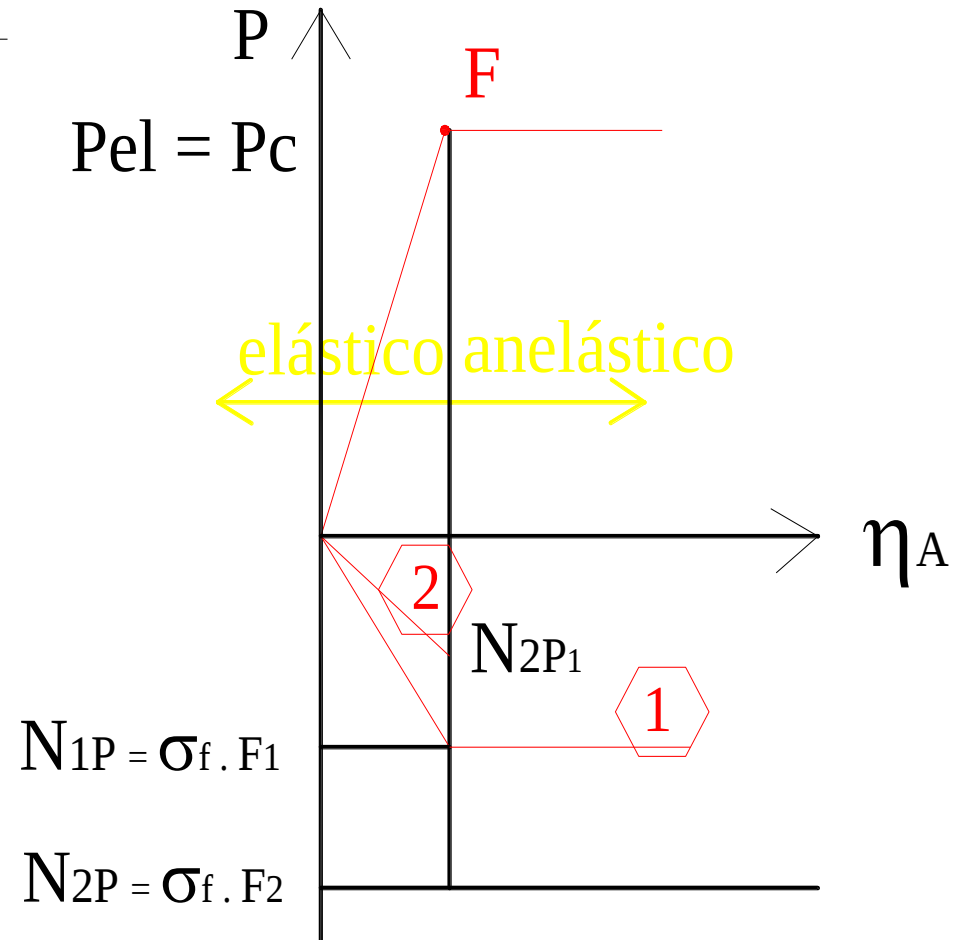
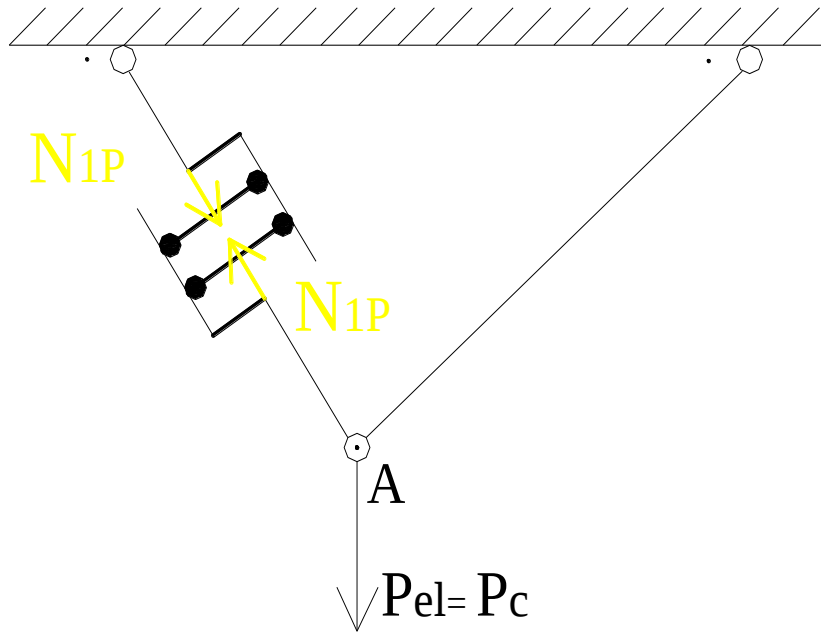


Siendo $N_1 > N_2$ y $F_2 > F_1$ resulta $\sigma_1 > \sigma_2$

Si incrementamos P la barra 1 alcanzará primero la σ_f

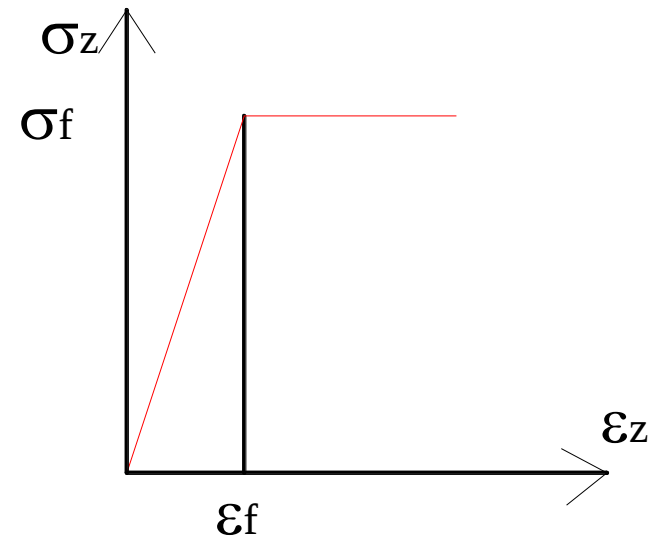
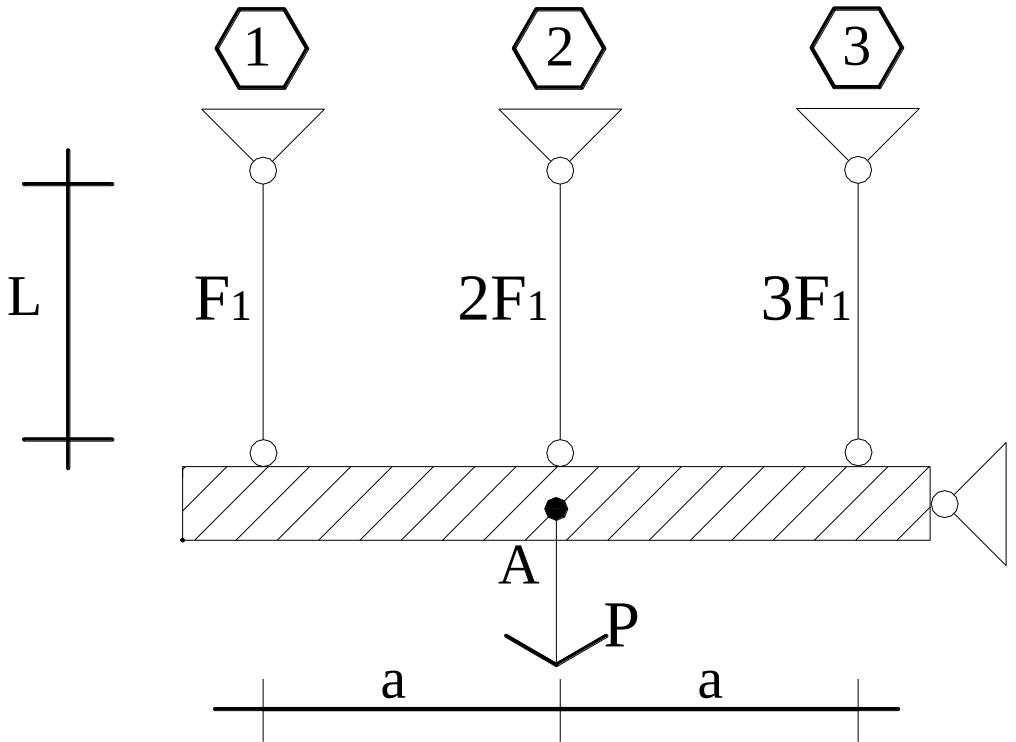
Se genera una articulación plástica en la barra 1

MECANISMO DE COLAPSO

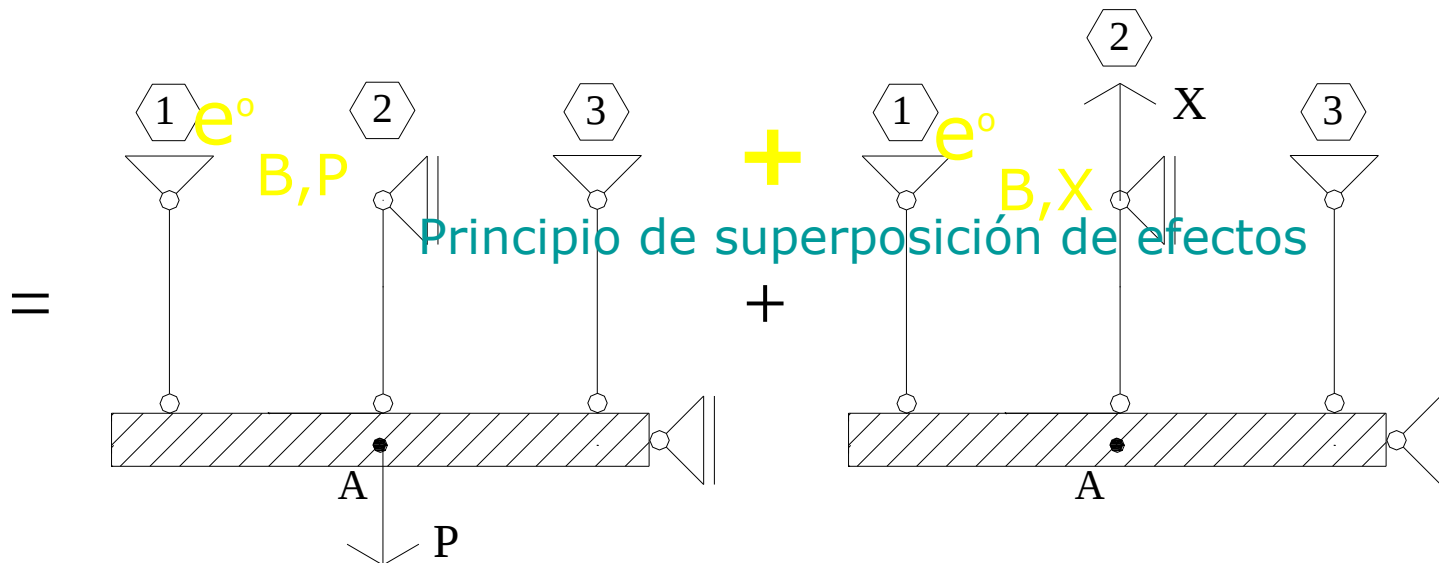
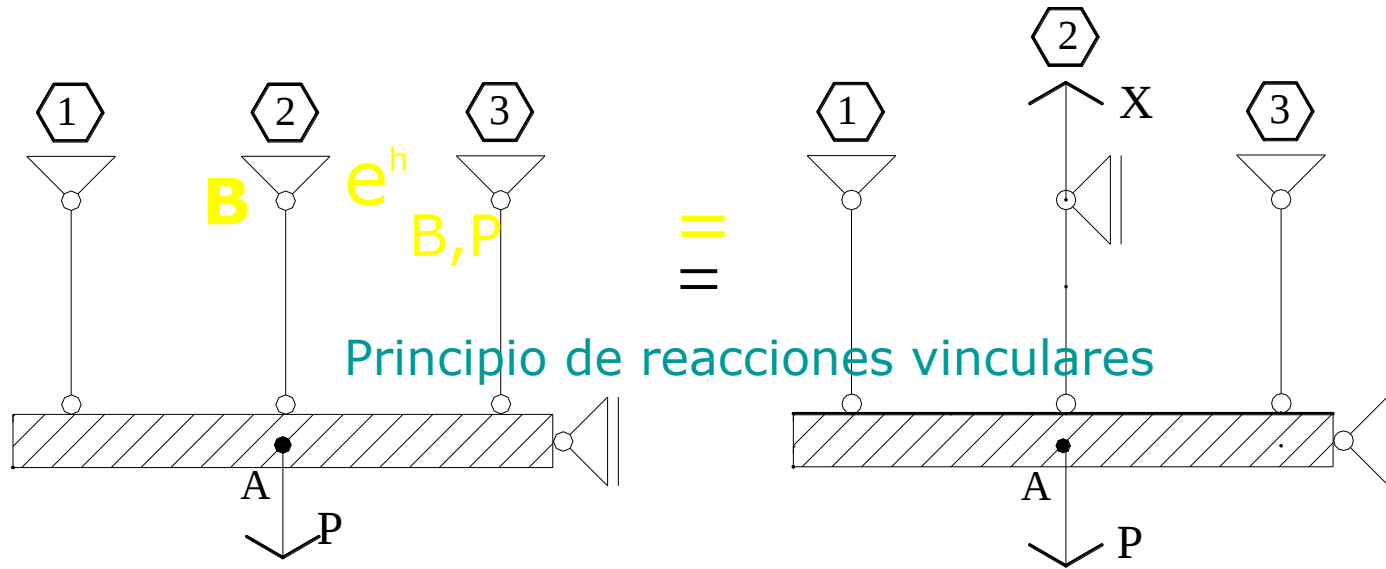


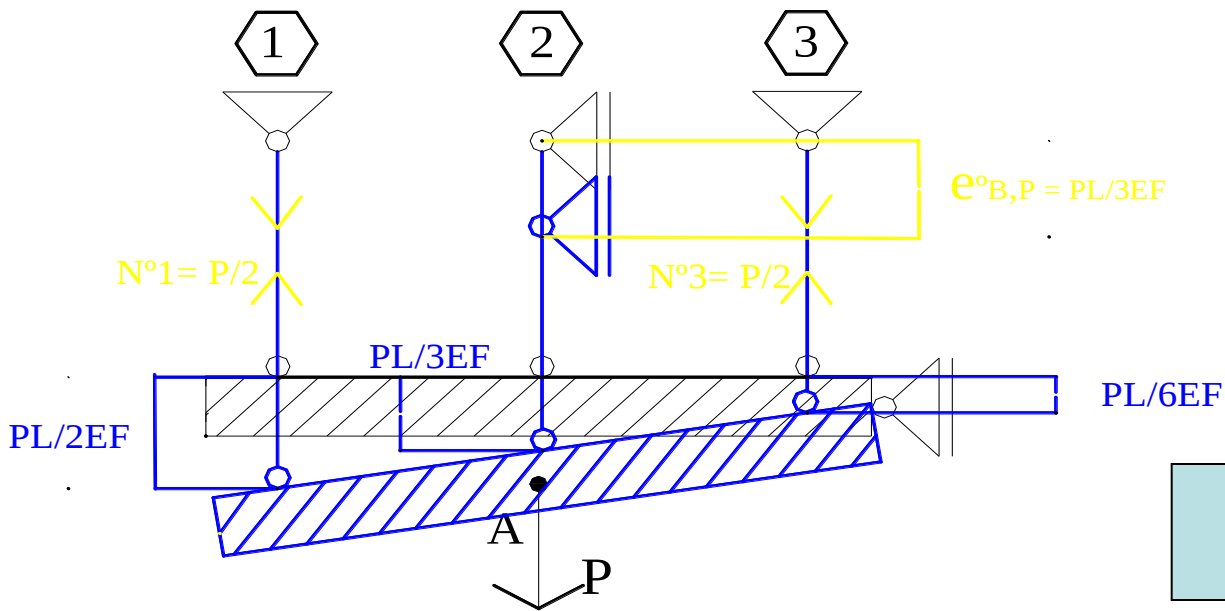
Si se continua deformando cambian los ángulos, y por ende la distribución de solicitaciones internas, apartándonos de la $\exists LE$ y $\exists LC$

ESTRUCTURA HIPERESTATICA



Transformamos el hiperestático en un isostático eliminando un vínculo

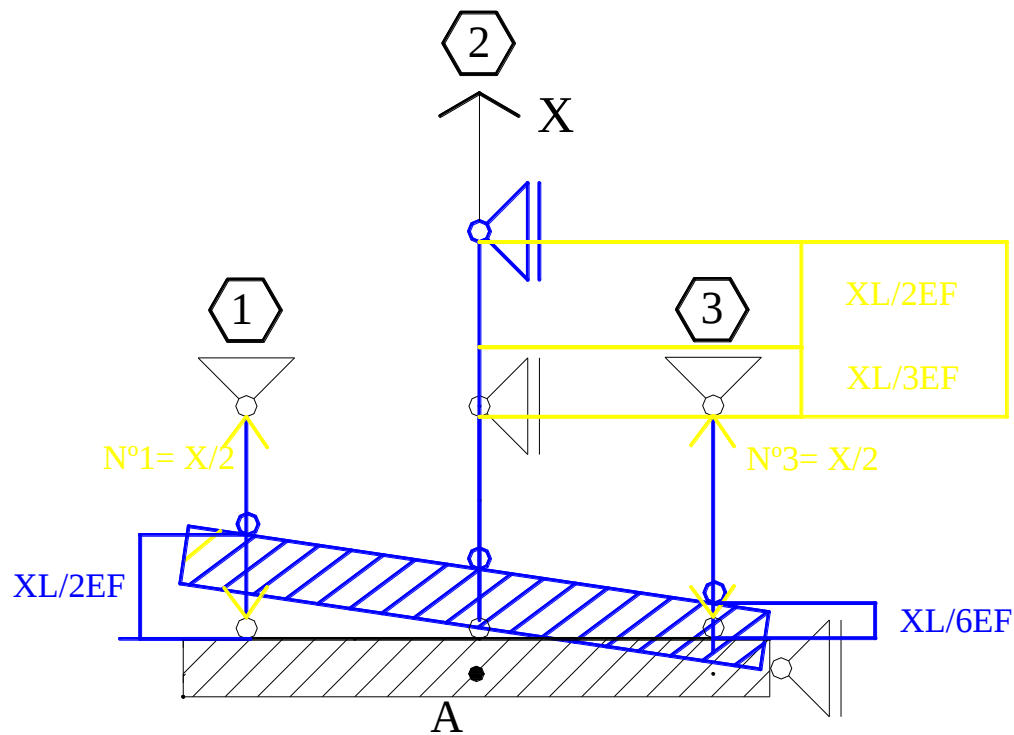




$$e^h_{B,P} = e^{\circ}_{B,P} + e^{\circ}_{B,X}$$

$$0 = - PL / 3 EF + 5 XL / 6 EF$$

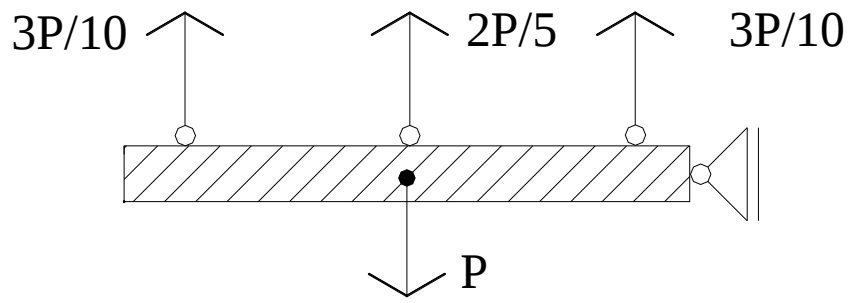
$$X = 2/5 \cdot P$$



$$N^{\circ}1 = P/2 - 1/2 \cdot 2P/5 = 3/10 \cdot P$$

$$N^{\circ}2 = X = 2/5 \cdot P$$

$$N^{\circ}3 = N^{\circ}1$$

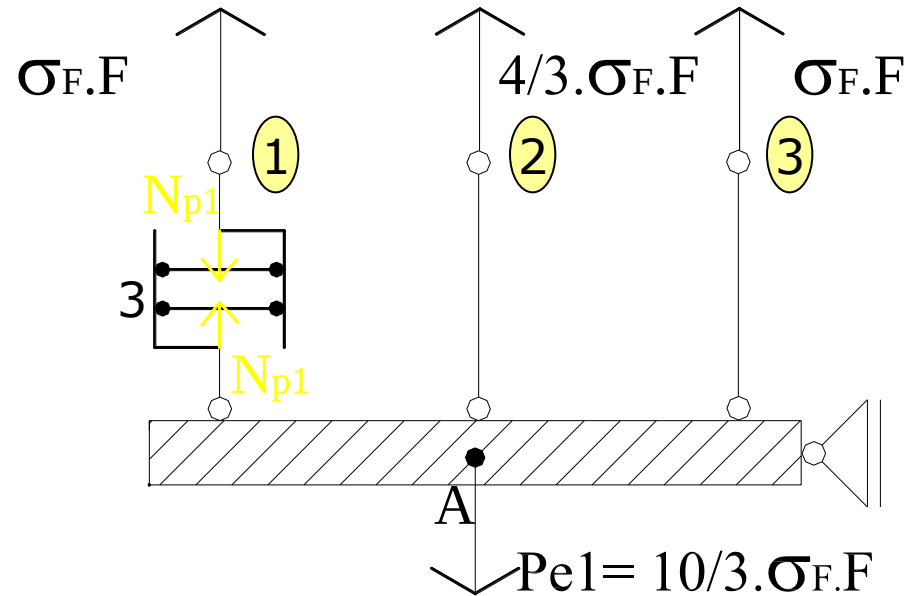
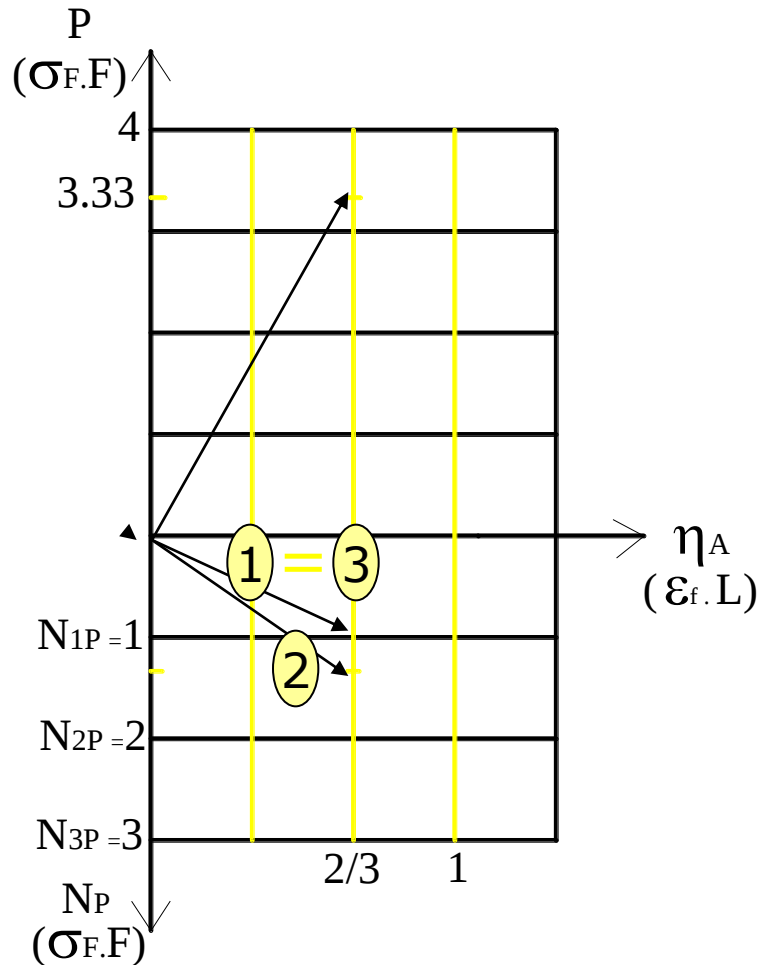


La barra 1 es la que mayor tensión presenta.

Es la primera que se plastifica.

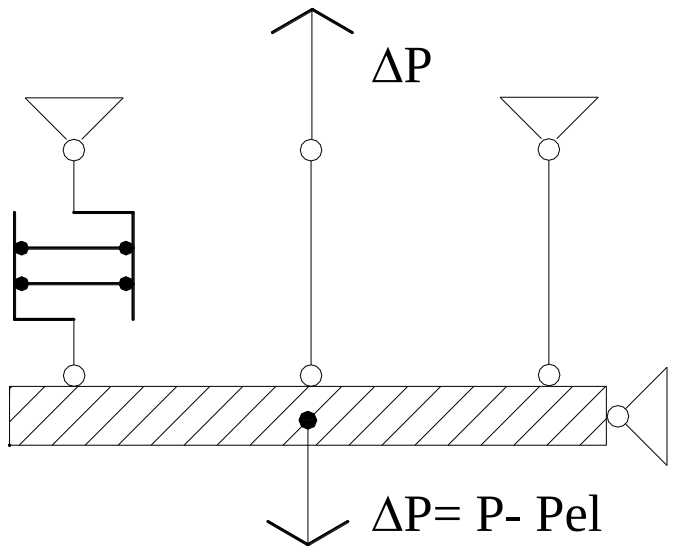
$$N_{p1} = \sigma_f \cdot F = 3/10 P_{el} \rightarrow P_{el} = 10/3 \cdot \sigma_f \cdot F$$

Grafiquemos $P - \eta_A$ y $N_p - \eta_A$



Determinamos el corrimiento del punto A

$$\eta_{A, P_{el}} = 4/3 \cdot \sigma_f \cdot F \cdot L / 2 EF = 2/3 \cdot \epsilon_f \cdot L$$



$P > P_{el}$ el incremento ΔP lo toma solamente la barra 2

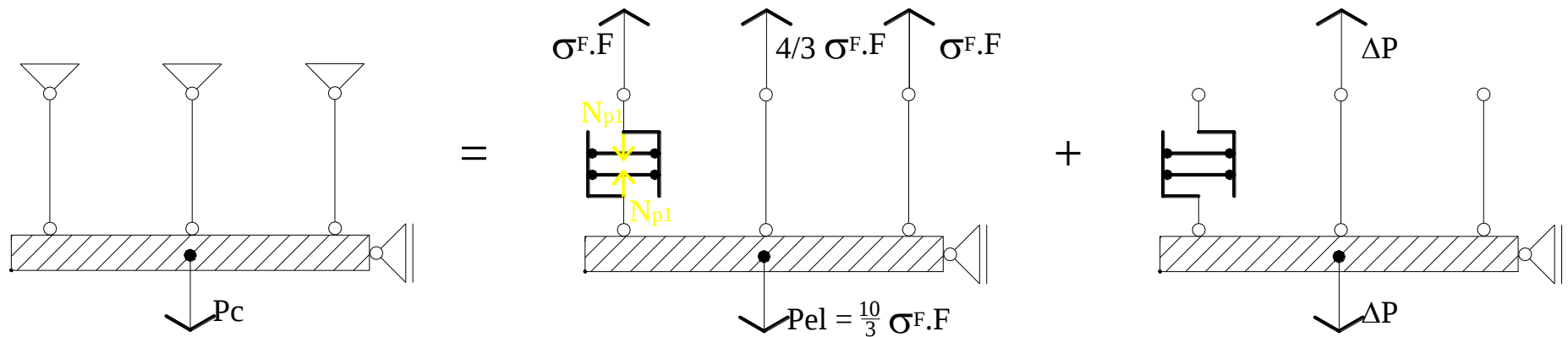
Cuando N_2 alcanza el esfuerzo de plastificación se pierde otro vínculo



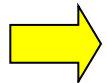
MECANISMO DE COLAPSO



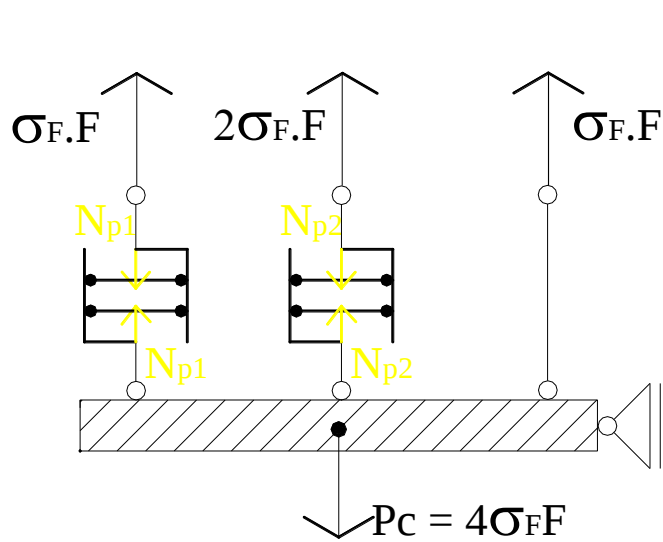
$P_C = \text{CARGA DE COLAPSO}$



$$N_{p2} = \sigma_f \cdot 2F = \frac{4}{3} \sigma_f \cdot F + \Delta P \quad \Rightarrow \quad \Delta P = \frac{2}{3} \sigma_f \cdot F$$



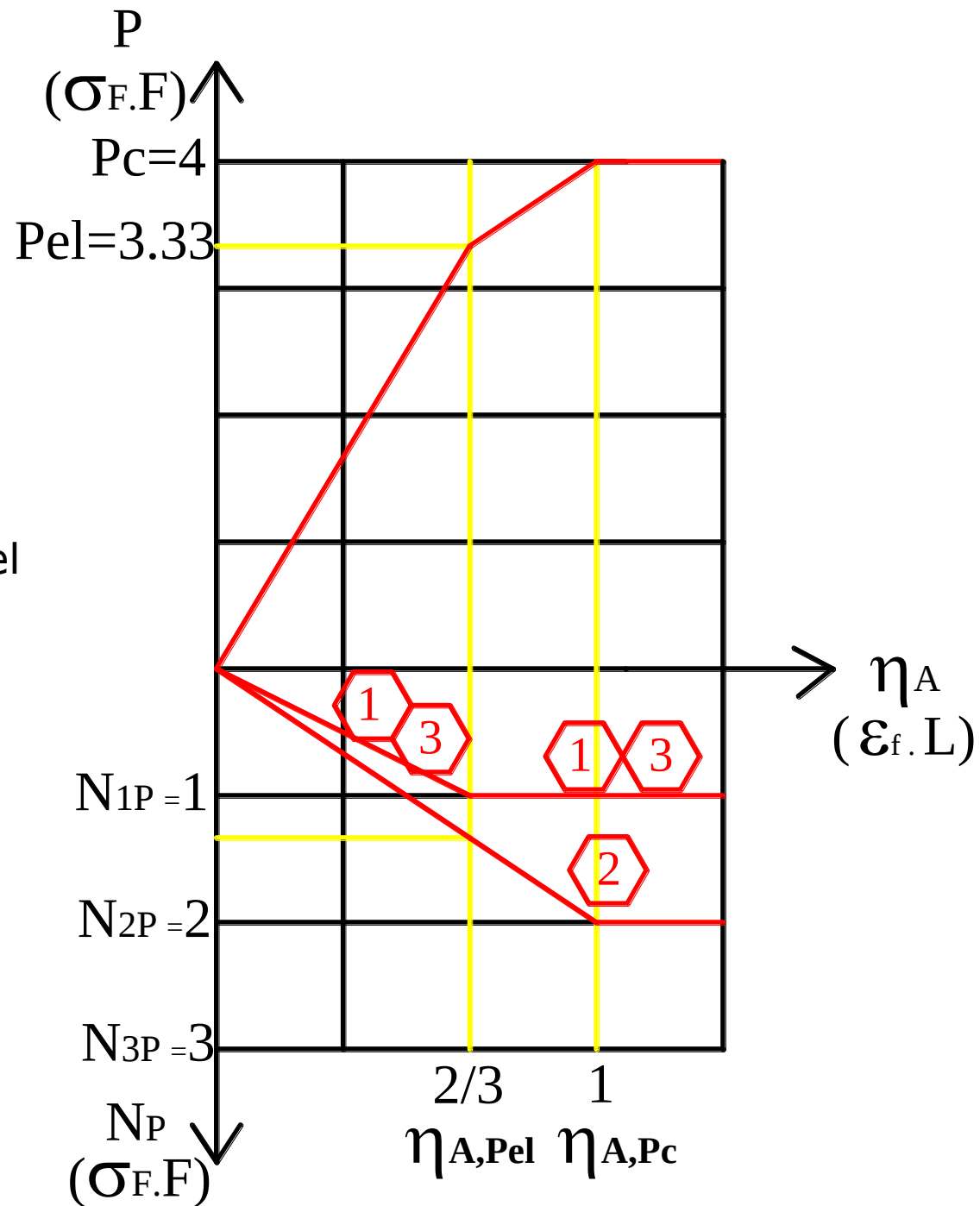
$$\mathbf{P_C = P_{el} + \Delta P = 4 \sigma_f \cdot F}$$



Calculamos el corrimiento del punto A para la P_c

$$\eta_A = 2\sigma_{F.F.L}/2 E.F = \epsilon_{F.L}$$

Grafiquemos los resultados

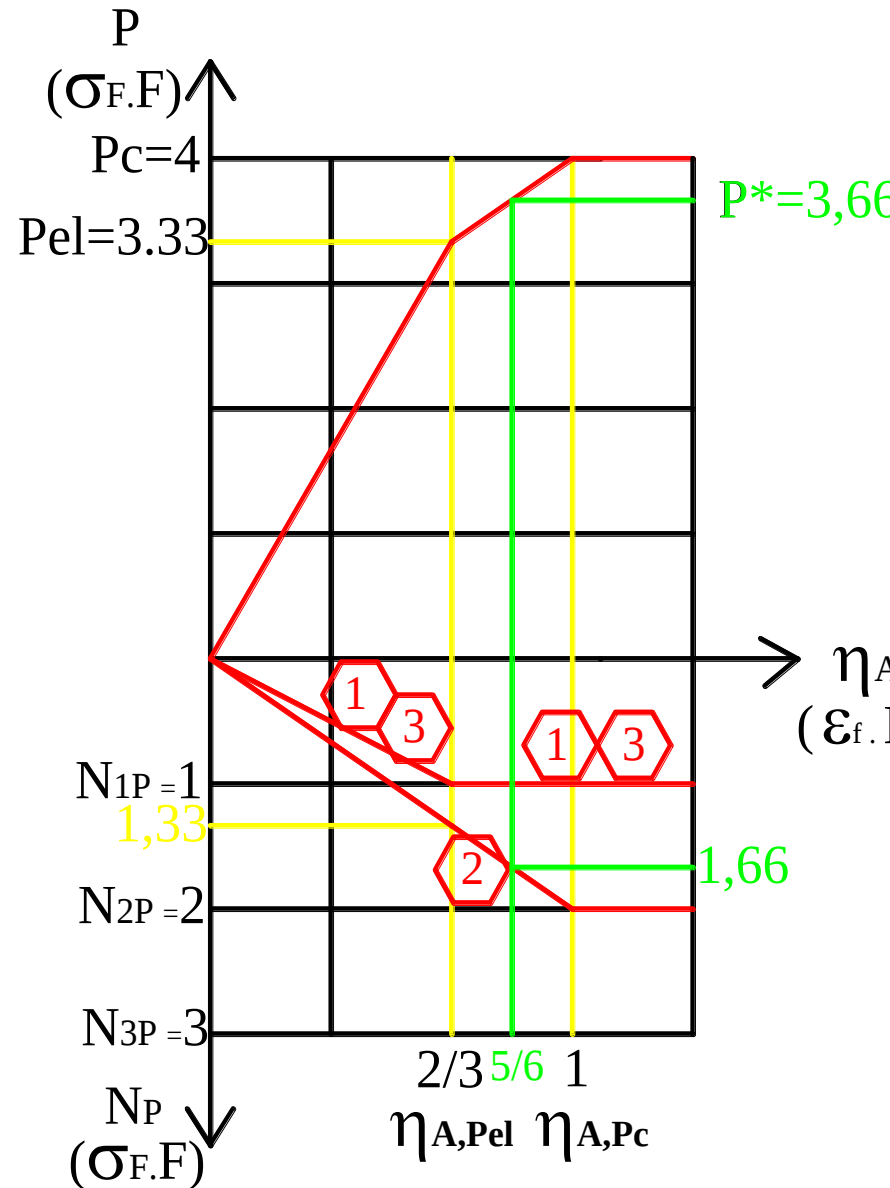
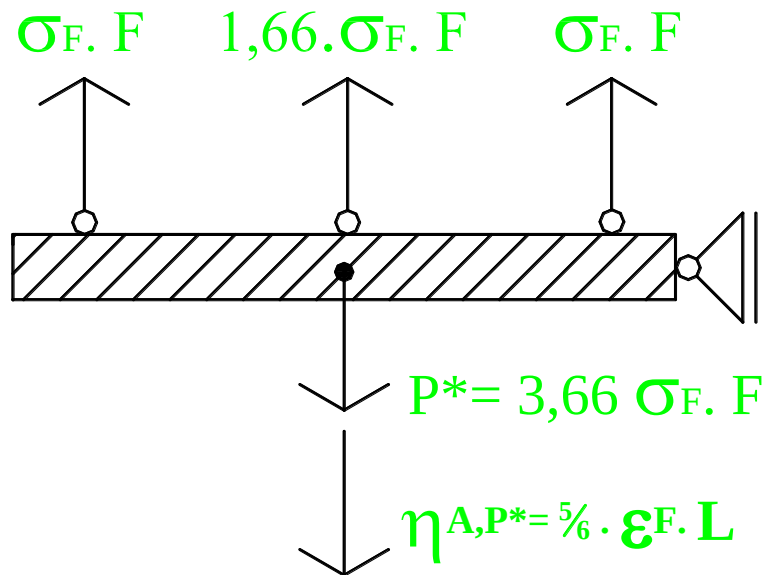


TENSIONES Y DEFORMACIONES RESIDUALES

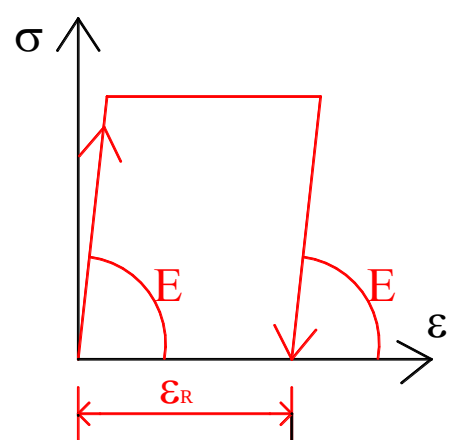
Procedamos a cargar la estructura anterior con una carga entre la P_{el} y P_c

Adoptamos una $P^* = (P_{el} + P_c)/2$

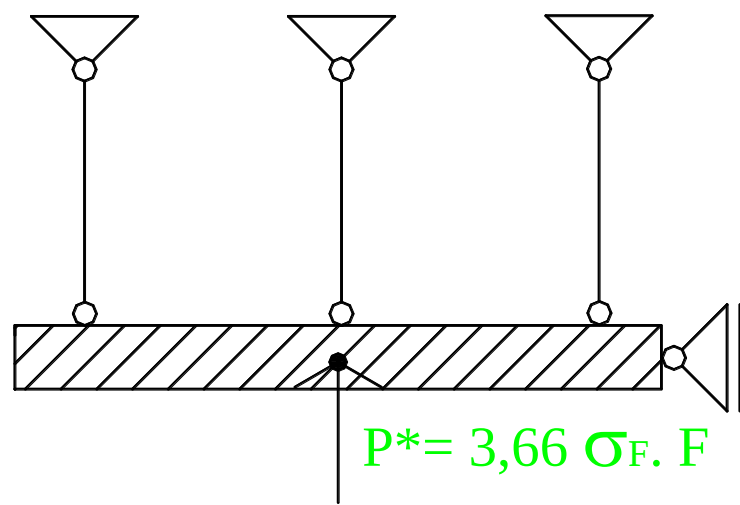
Determinamos los esfuerzos en las barras y el desplazamiento del punto A



Experimentalmente, se verificó que la recta de descarga tiene la misma pendiente que la del campo elástico

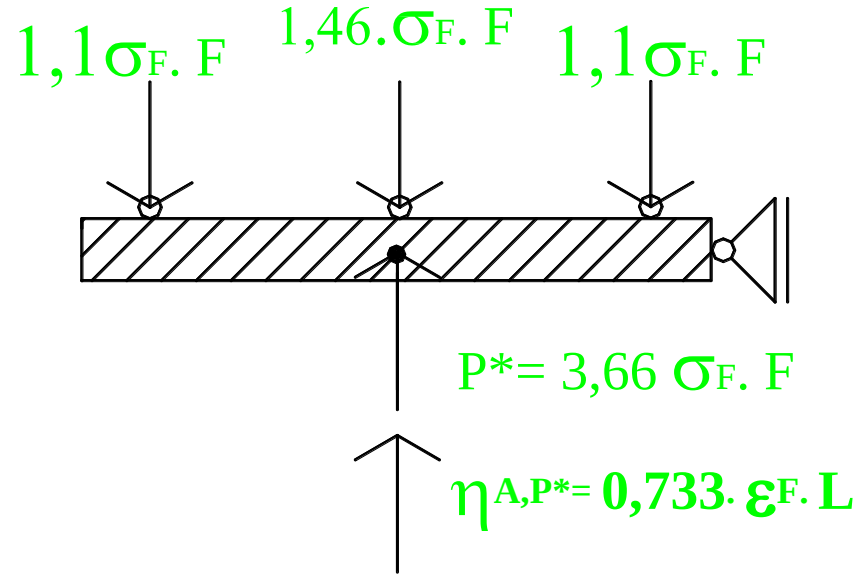
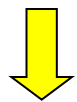
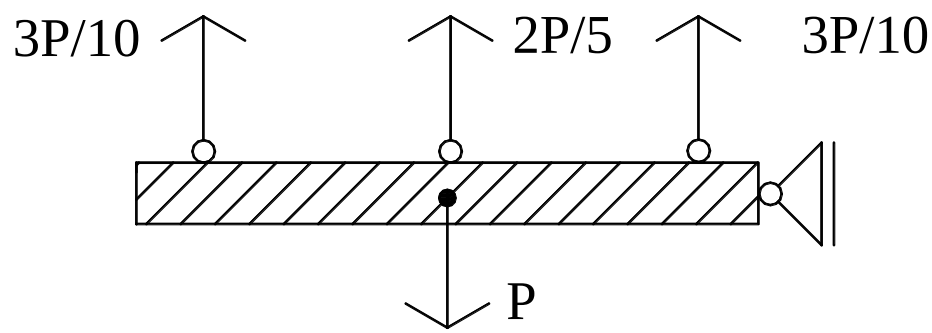


El modelo para analizar la descarga es el modelo elástico original



$P^* = 3,66 \sigma_F \cdot F$

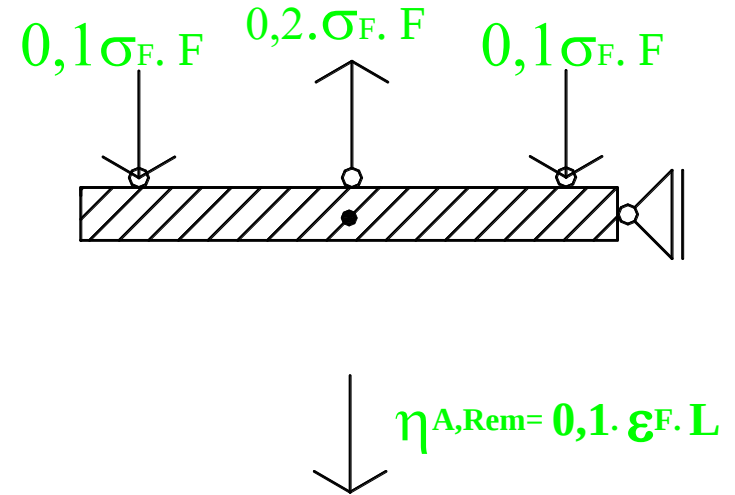
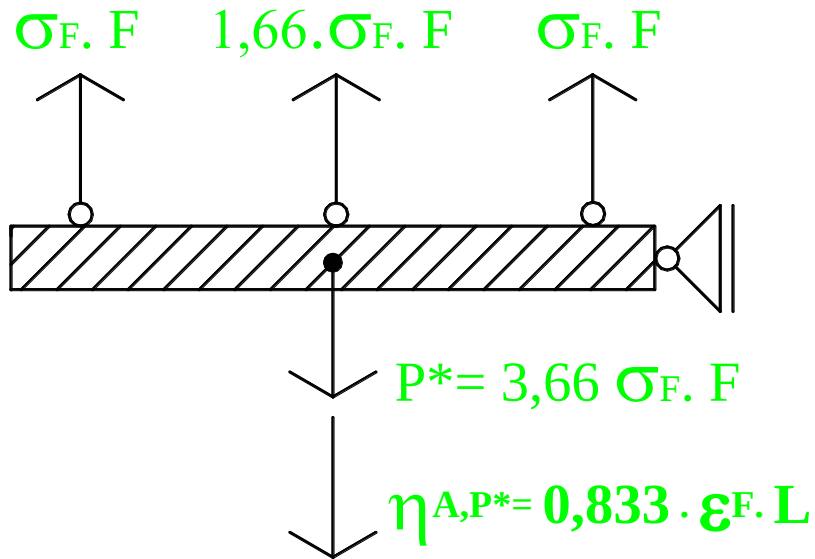
En la resolución del hiperestático alcanzamos estos resultados



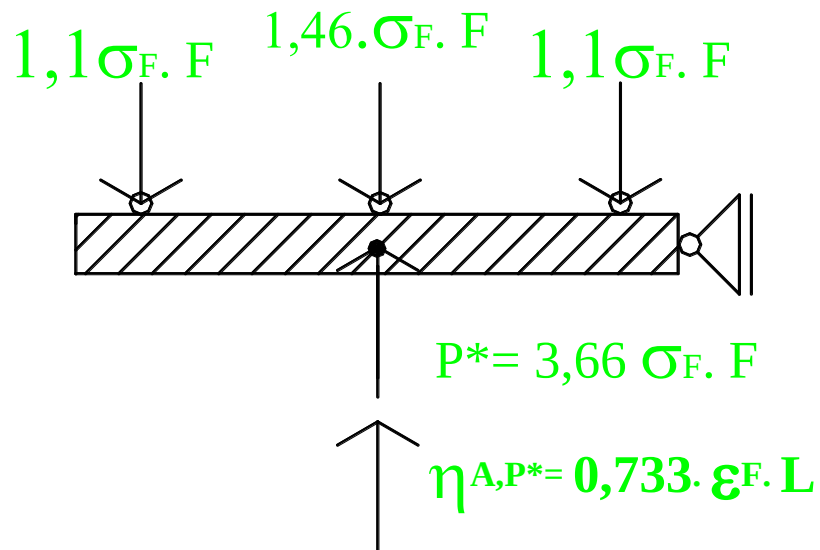
$P^* = 3,66 \sigma_F \cdot F$

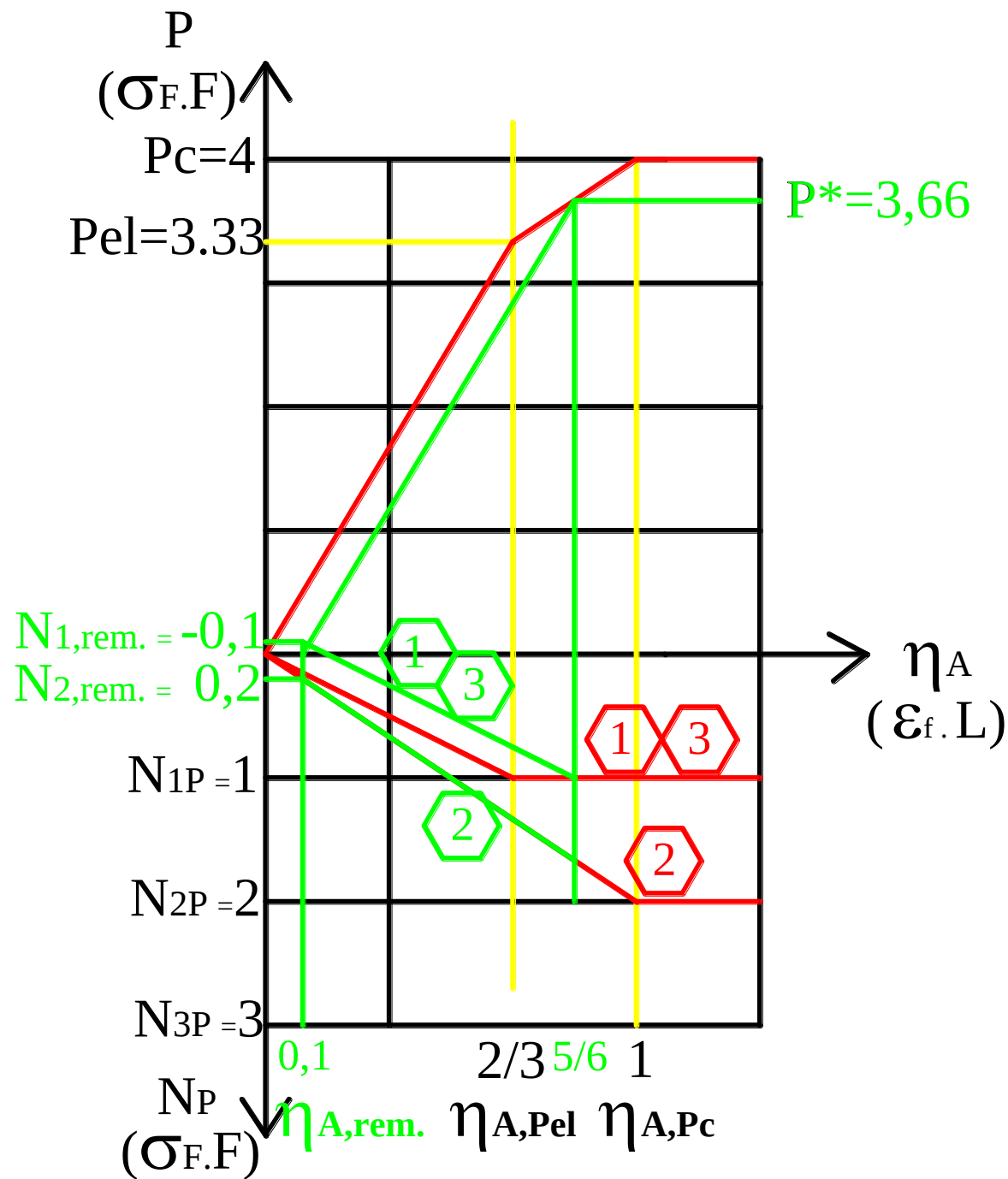
$\eta_{A,P^*} = 0,733 \cdot \epsilon_F \cdot L$

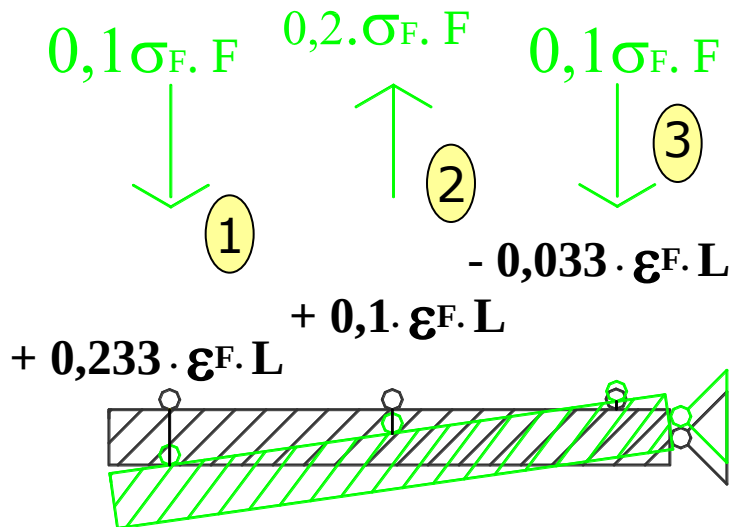
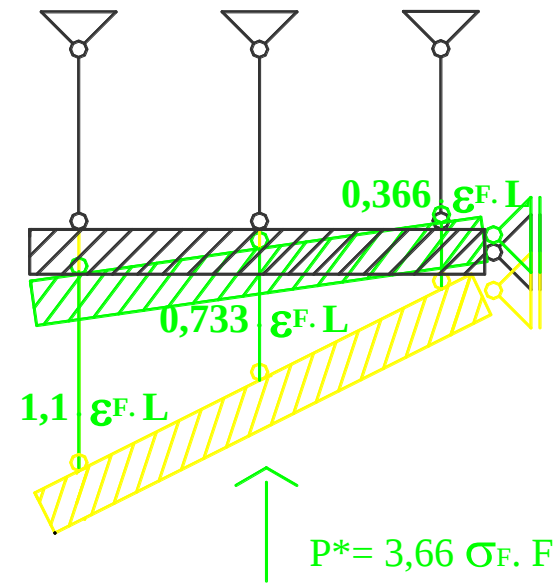
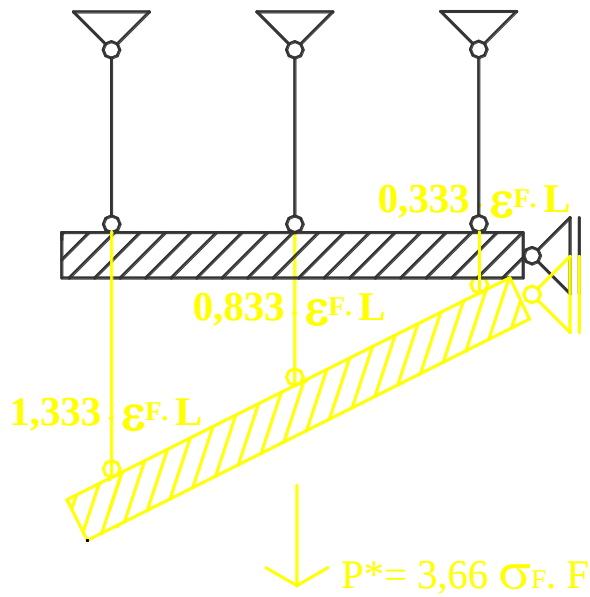
Obtengo las tensiones y deformaciones remanentes



Procedamos a descargar en el diagrama P- η y N- η





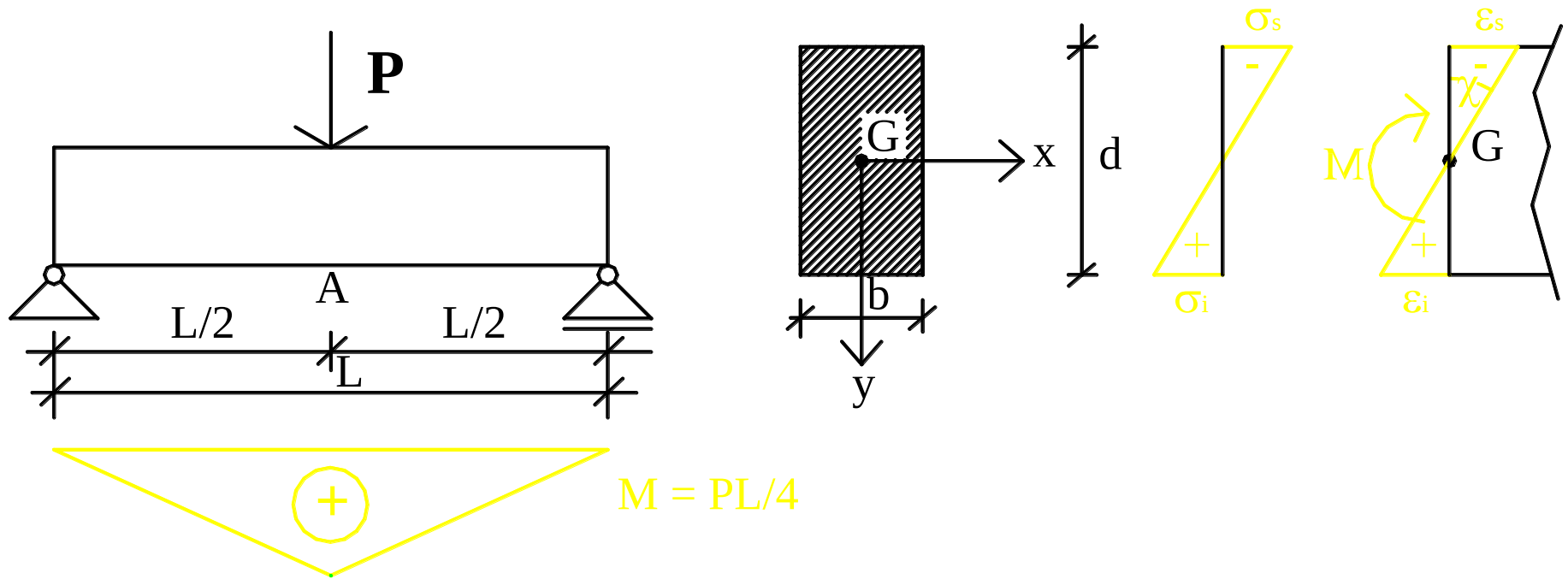


Las barras 2 y 3 tuvieron un comportamiento elástico, existe correlación entre las tensiones y deformaciones residuales

La barra 1 sufrió una deformación anelástica, y como consecuencia no existe un correlato elástico.

En barras solicitadas axialmente solo se generan tensiones residuales (ó autotensiones) en sistemas hiperestáticos

BARRAS SOLICITADAS A FLEXIÓN



$$\chi = (\epsilon_s - \epsilon_i)/d \quad \epsilon_s \leq \epsilon_p \text{ y } \epsilon_i \leq \epsilon_p$$

$$M = -E \cdot J \cdot \chi = -E \cdot J \cdot \frac{\epsilon_s - \epsilon_i}{d} = -E \cdot J \cdot \frac{2\epsilon_s}{d}$$

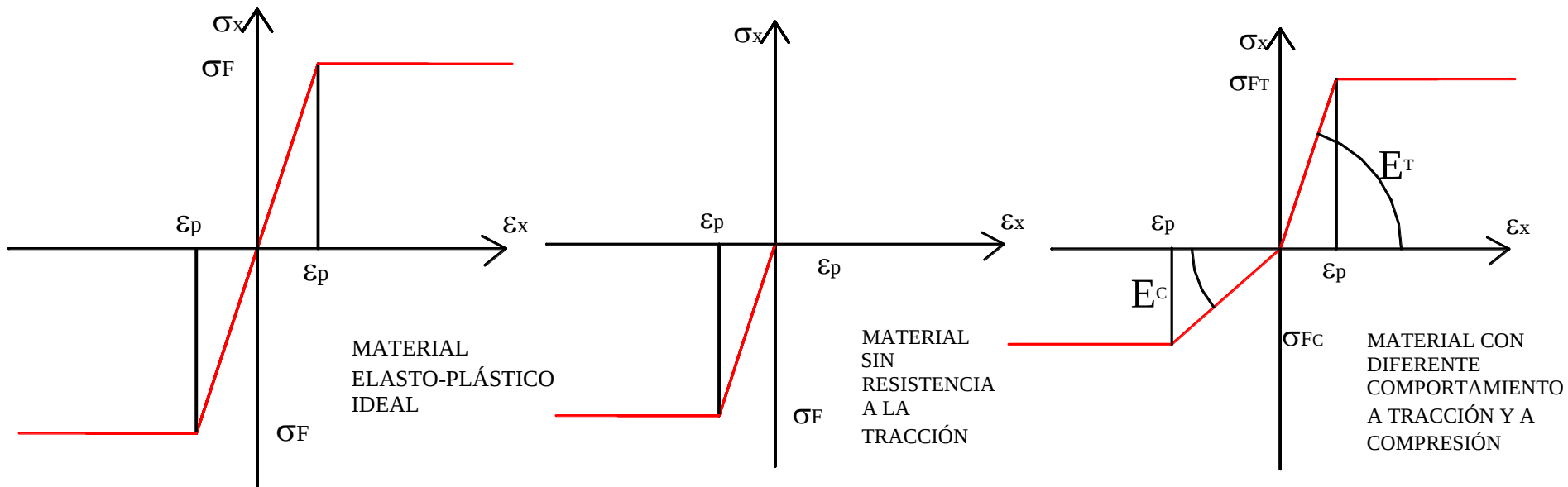
Si incrementamos P hasta que $\epsilon = \epsilon_p$

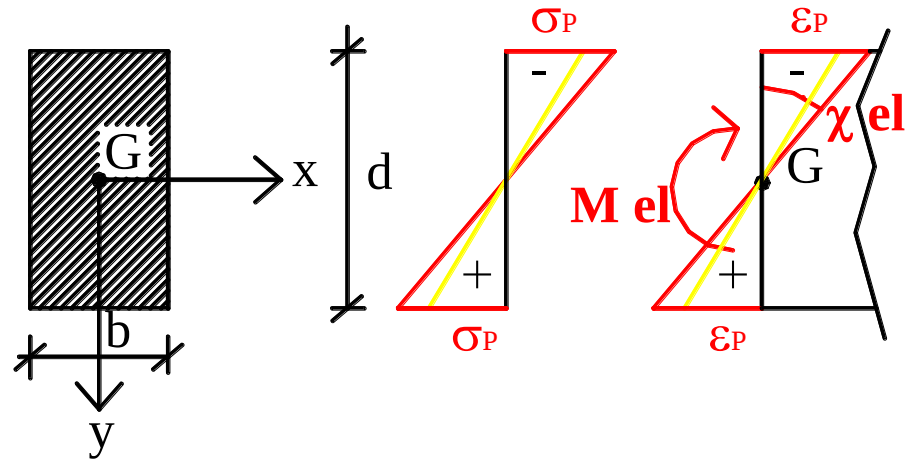
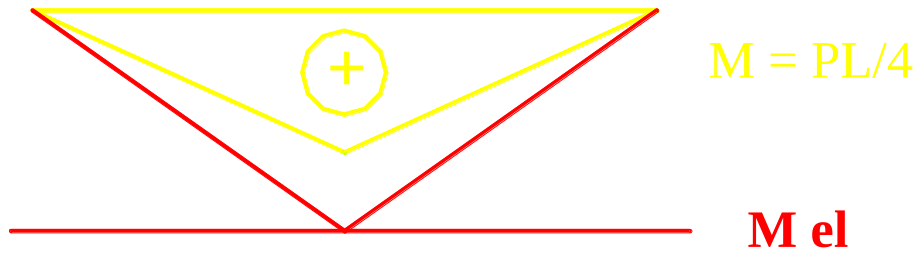
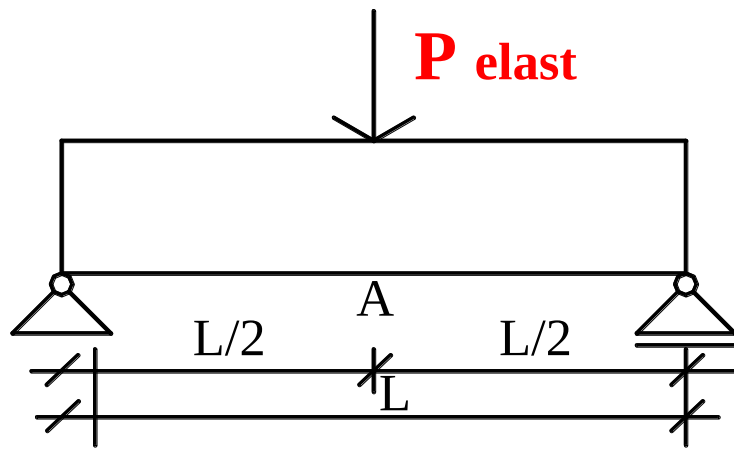
- ∃ LE Linealidad Estática
- ∃ LC Linealidad Cinemática
- ∄ LM Linealidad Mecánica

∄ PSE

Principio de Superposición de Efectos

- ∃ HSP Secciones Planas (Bernouilli-Navier)
- ∃ EPI Material elasto-plástico ideal



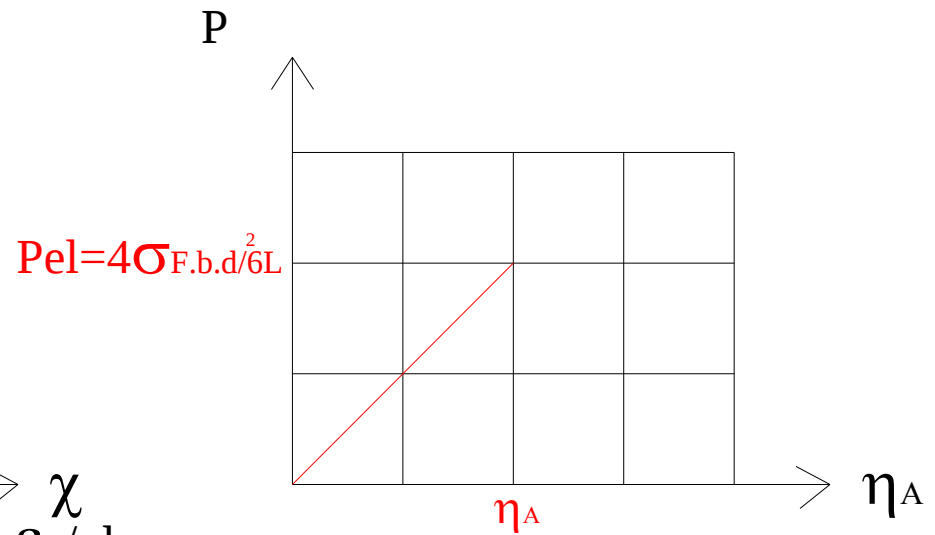
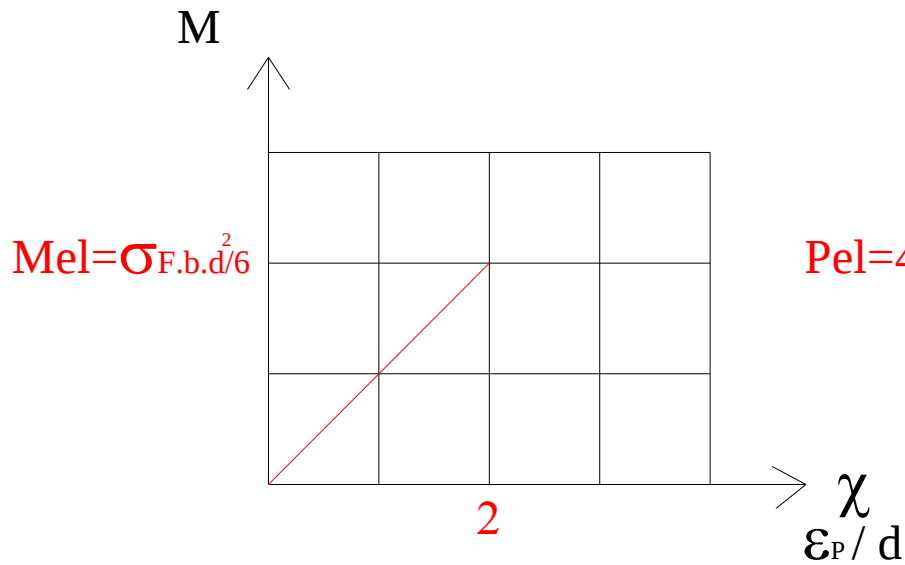


$$\chi_{\text{el}} = \frac{2 \cdot \epsilon_P}{d}$$

$$M_{\text{el}} = -E \cdot J \cdot \chi_{\text{el}} = -E \cdot J \cdot \frac{2 \epsilon_P}{d} = -E \cdot J \cdot \frac{2 \sigma_P}{E \cdot d} = \frac{b \cdot d^3}{12} \cdot 2 \cdot \frac{\sigma_P}{d}$$

$$M_{\text{el}} = \sigma_P \cdot \frac{b \cdot d^2}{6}$$

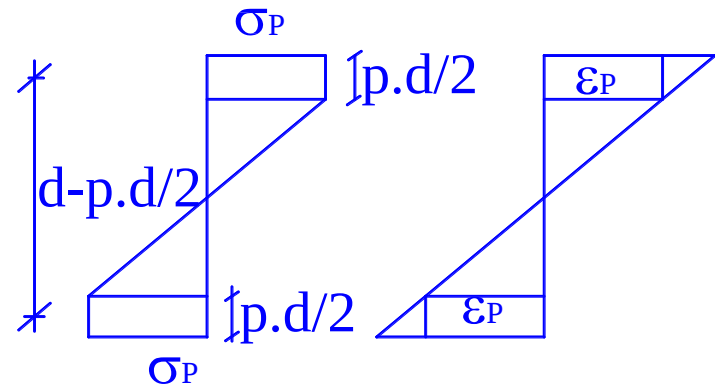
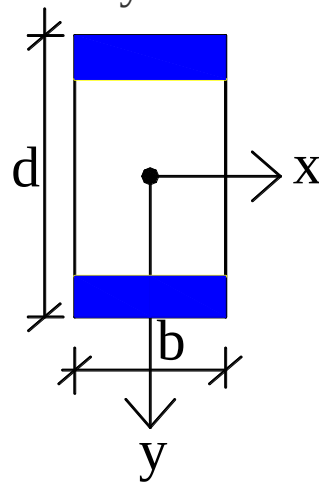
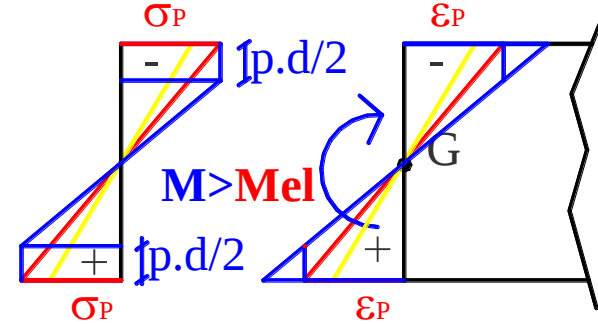
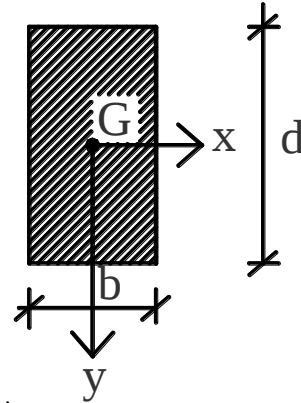
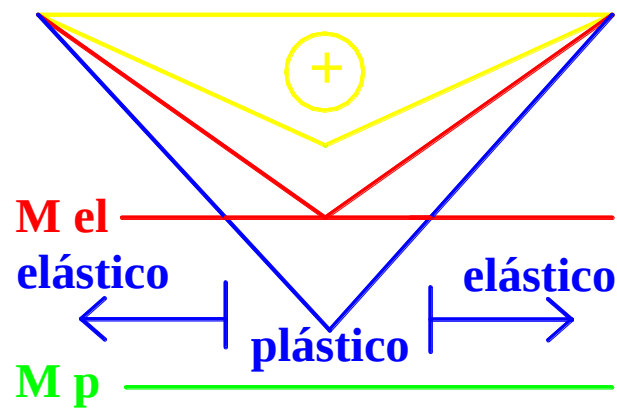
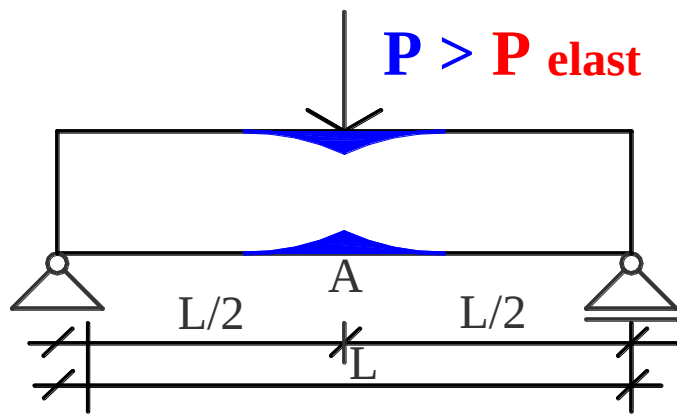
$$P_{\text{el}} = \frac{4}{L} \cdot \sigma_P \cdot \frac{b \cdot d^2}{6} = \frac{2}{3} \cdot \sigma_P \cdot \frac{b \cdot d^2}{L}$$



En periodo elástico la relación es lineal

Si incrementamos la carga P por encima de la P_{el} , aparecerá una sección plastificada

p = penetración plástica $\Rightarrow$ p = sección plastificada / sección total



$$M_p = \sigma_p \cdot b \cdot \frac{p}{2} \cdot d \cdot \left(d - \frac{p}{2} \cdot d \right) + \sigma_p \cdot \frac{b \cdot (d - p \cdot d)^2}{6}$$

$$\chi_p = \frac{2 \cdot \epsilon_p}{d - p \cdot d}$$

$$M_p = \sigma_p \cdot \frac{b \cdot d^2}{4} \cdot \left[2p - p^2 + \frac{2}{3} \cdot (1 - p)^2 \right]$$

$$M_p = \sigma_p \cdot \frac{b \cdot d^2}{4} \cdot \left[p(2 - p) + \frac{2}{3} \cdot (1 - p)^2 \right]$$

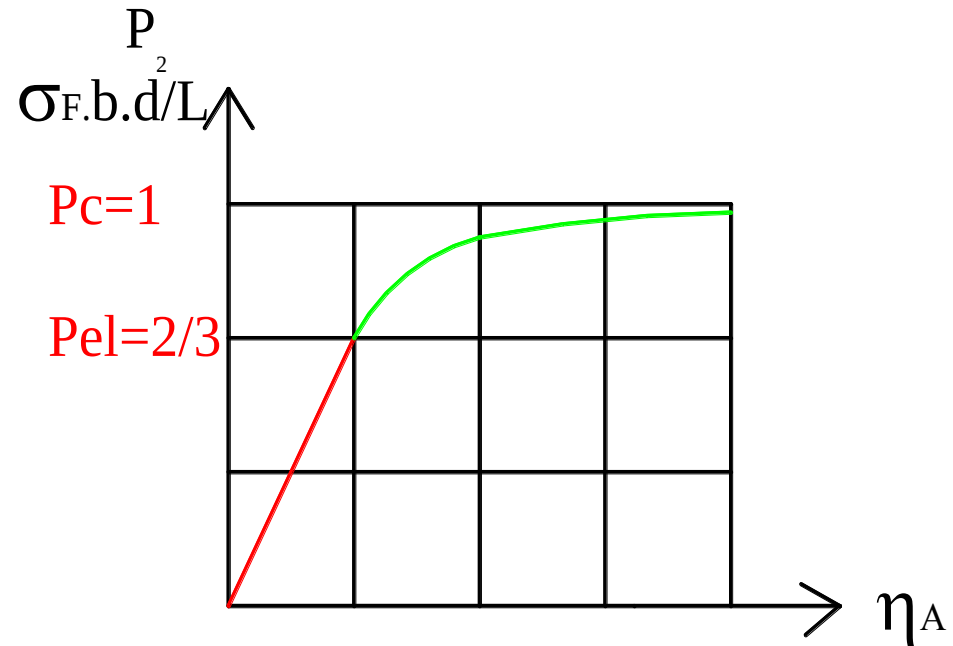
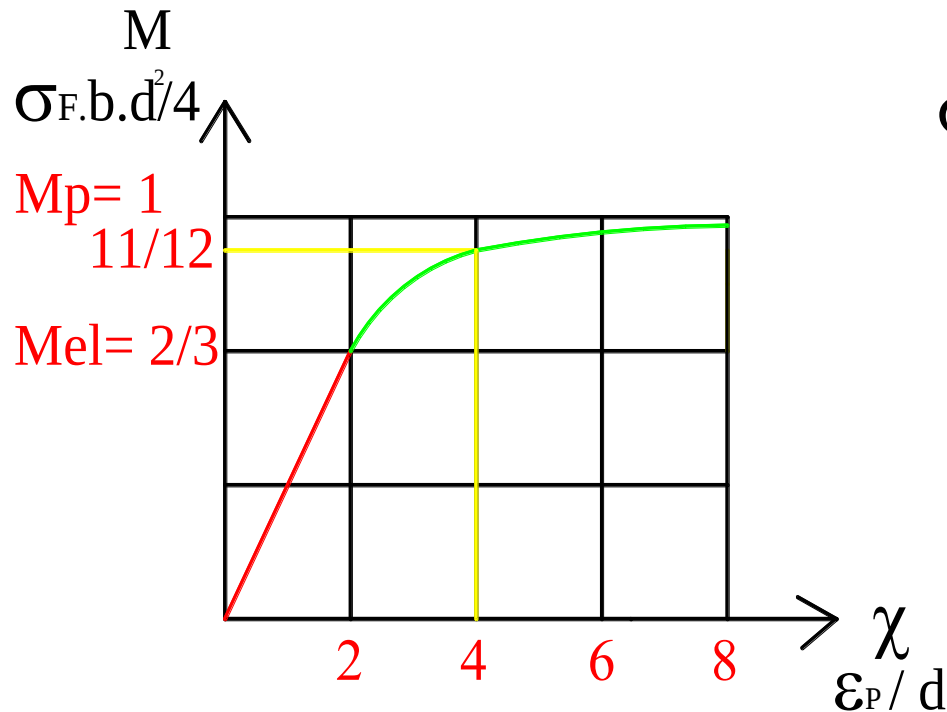
$$M_{.p} = \sigma_{.p} \cdot \frac{b \cdot d^2}{4} \cdot \left[p(2 - p) + \frac{2}{3} \cdot (1 - p)^2 \right]$$

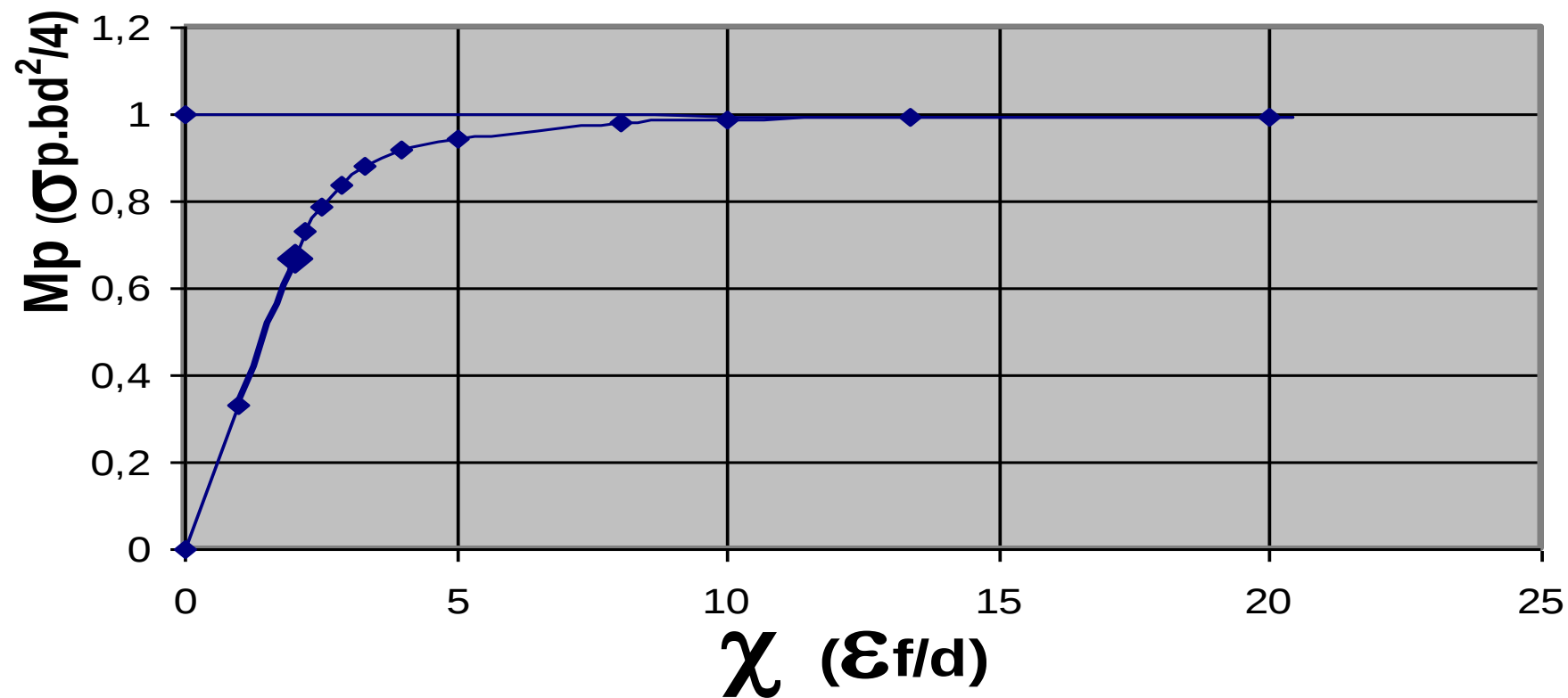
$$\chi_{.p} = \frac{2 \cdot \varepsilon_{.p}}{d - p \cdot d}$$

$$p=0 \Rightarrow M_{el} = 2/3 \quad \sigma_{p.b.d^2/4} \Rightarrow \chi_{el} = 2 \varepsilon_p/d$$

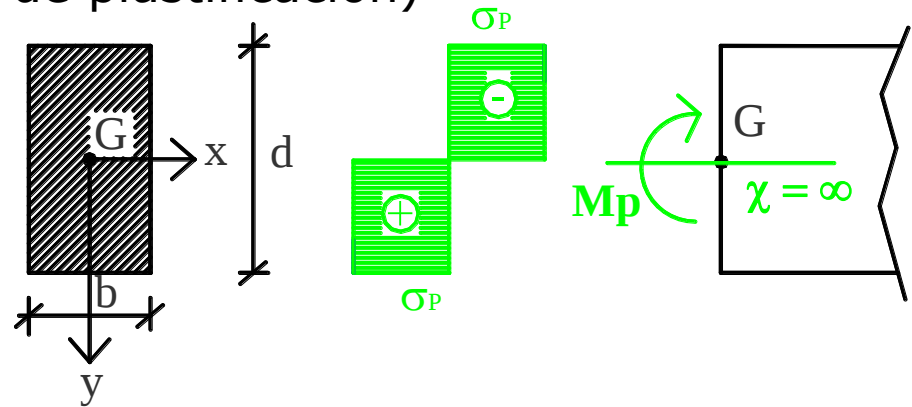
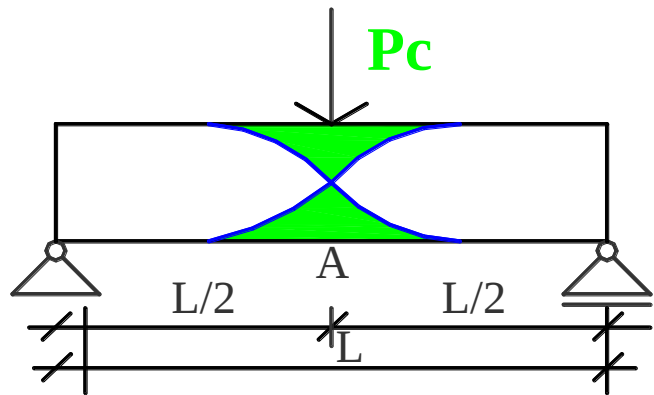
$$p=0,5 \Rightarrow M_{p0,5} = 11/12 \quad \sigma_{p.b.d^2/4} \Rightarrow \chi_{p0,5} = 4 \varepsilon_p/d$$

$$p=1 \Rightarrow M_p = \quad \sigma_{p.b.d^2/4} \Rightarrow \chi_p = \infty$$





Cuando alcanzo el Mp (momento de plastificación)



Toda la sección esta plastificada $\rightarrow p = 1$

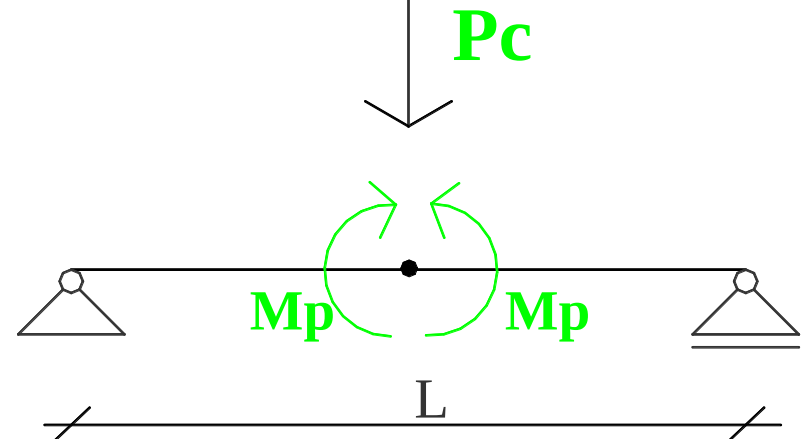
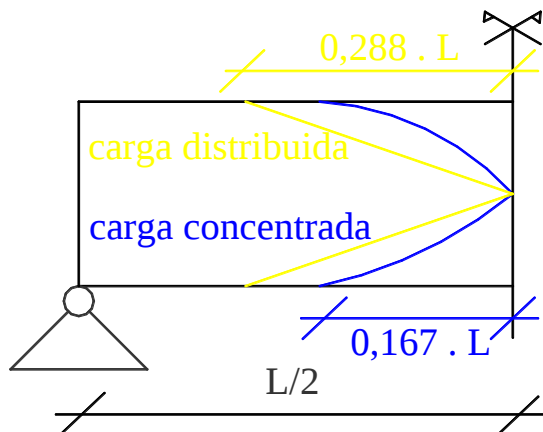
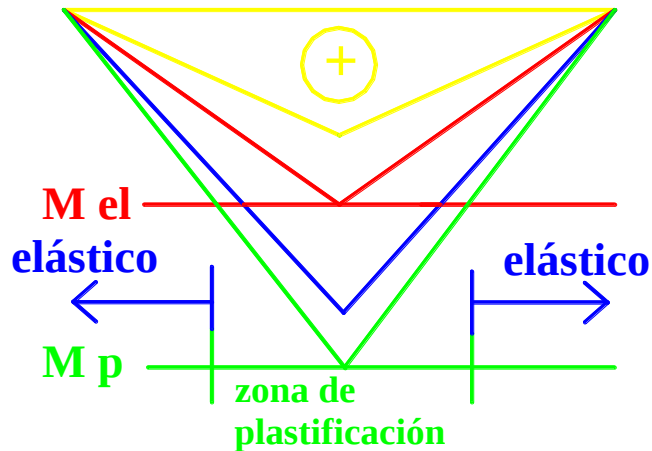
No se puede incrementar el Momento

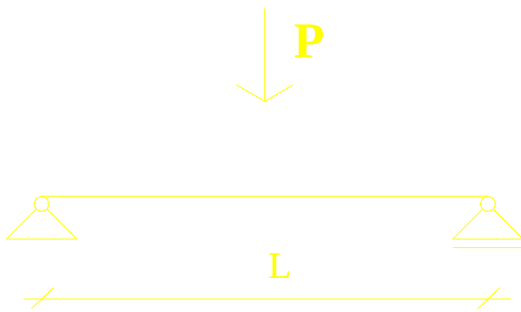
$$M_p = \sigma_f \cdot b \cdot d^2 / 4$$

La curvatura crece excesivamente $\rightarrow \square$

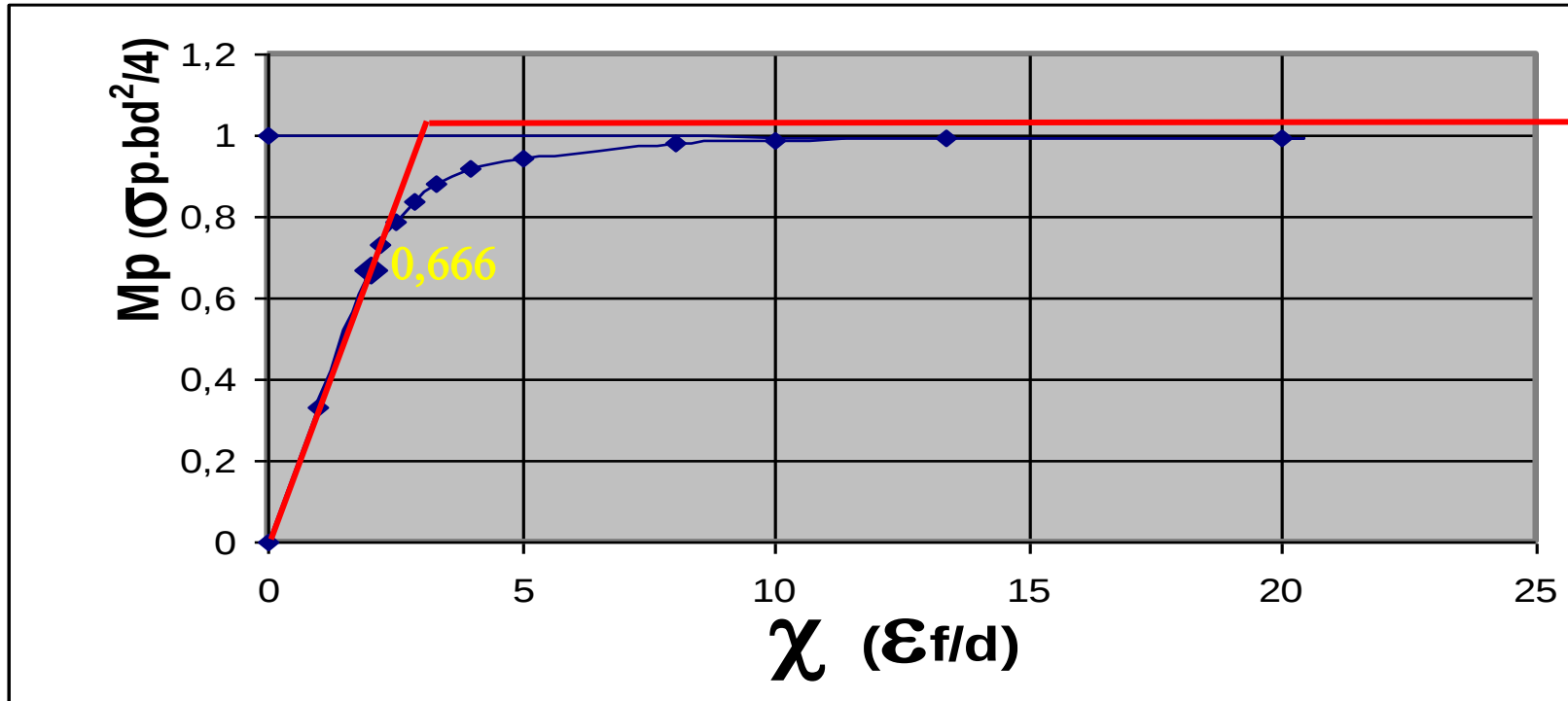
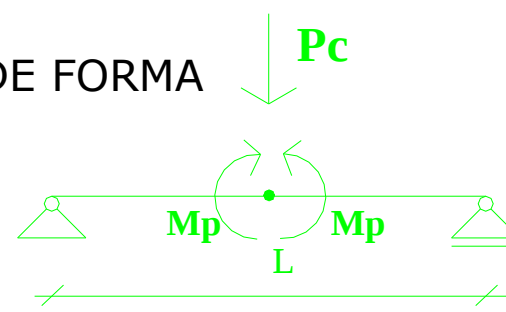
∇ LC

aparecen grandes deformaciones, se presenta un giro relativo finito entre dos secciones próximas





COEFICIENTE DE FORMA



Definimos un factor de forma plástico como la relación M_p / M_{el}

Para la sección rectangular $\kappa = M_p / M_{el} = \sigma_F \cdot b \cdot d^2 / 4 / \sigma_F \cdot b \cdot d^2 / 6 = 1,5$

● $\kappa = 1,7$

⌐ $\kappa = 1,15$

ECUACIONES DE EQUIVALENCIA

Para una CONDICION DE PLASTIFICACION TOTAL $p=1$

$$N = 0 = \int_F \sigma \cdot dF = \int_{F_t} \sigma_{F_t} \cdot dF + \int_{F_c} \sigma_{F_c} \cdot dF$$

Suponiendo $\sigma_{F_t} = \sigma_{F_c}$

Si fuesen distintos quedaría una constante al sacar factor común

$$\sigma_{F_t} = k \cdot \sigma_{F_c}$$

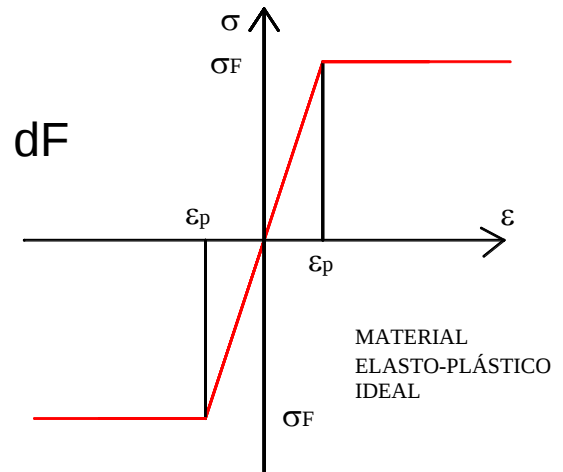
$$\sigma_F \cdot \left[\int_{F_t} dF + \int_{F_c} dF \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F_t = F_c}$$

→ Cuando la sección no es doblemente simétrica
el E.N. va cambiando de posición durante el periodo plástico

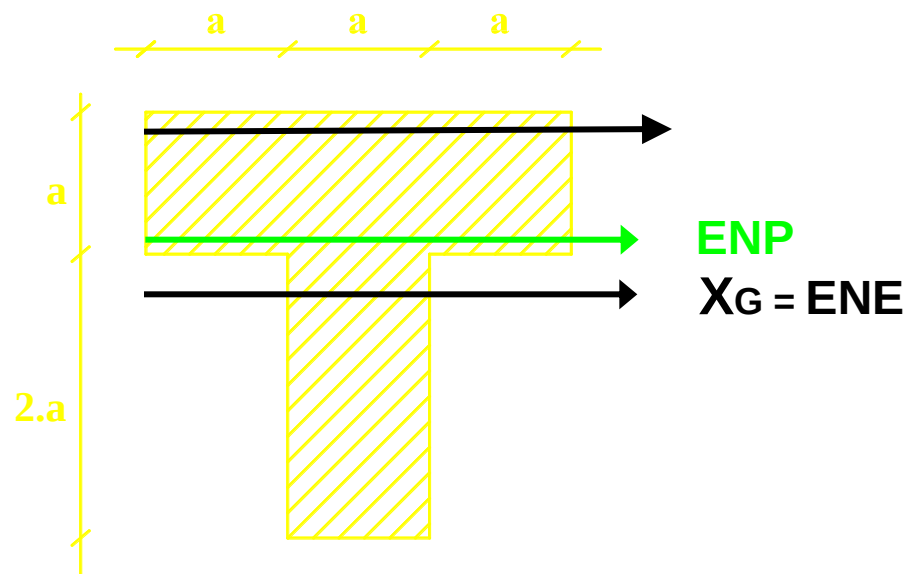
$$\begin{aligned} M_x = M_p &= \int_F \sigma \cdot dF \cdot y = \int_{F_t} \sigma_{F_t} \cdot dF \cdot y + \int_{F_c} \sigma_{F_c} \cdot dF \cdot y \\ &= \sigma_F \cdot \left[\int_{F_t} y \cdot dF + \int_{F_c} y \cdot dF \right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{M_p = \sigma_F \cdot [S_{n,F_t} + S_{n,F_c}] = \sigma_F \cdot z}$$

Siendo z = módulo plástico (valor tabulado en tablas de perfiles)



Determinemos para el perfil "T" el M_{el} y M_p



Determinamos la ubicación del G

$$S_x = 3.a^2 \cdot a/2 + 2.a^2 \cdot 2a = 5.a^3$$

$$\Rightarrow Y_G = 11/10 \cdot a$$

$$F_t = F_c \Rightarrow Y_{ENP} = 5.a^2 / 2.3.a$$

Determinamos el J_{xG} y el M_{el}

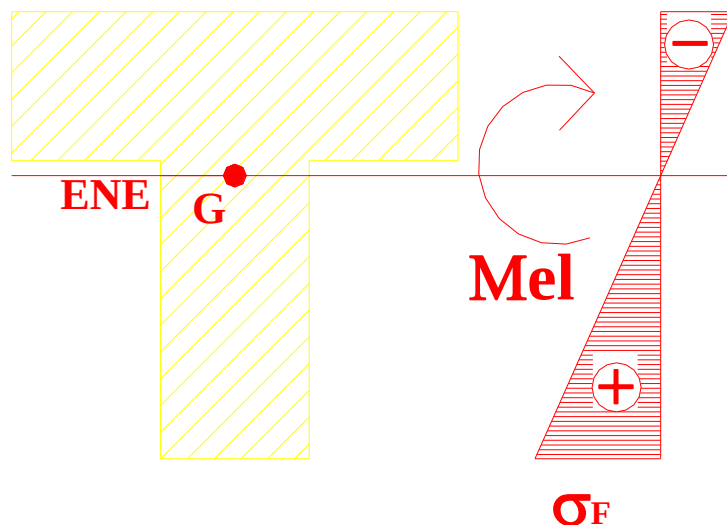
$$J_x = 2.a \cdot a^3/3 + a \cdot (3a)^3/3 = (2/3 + 9).a \cdot a^3$$

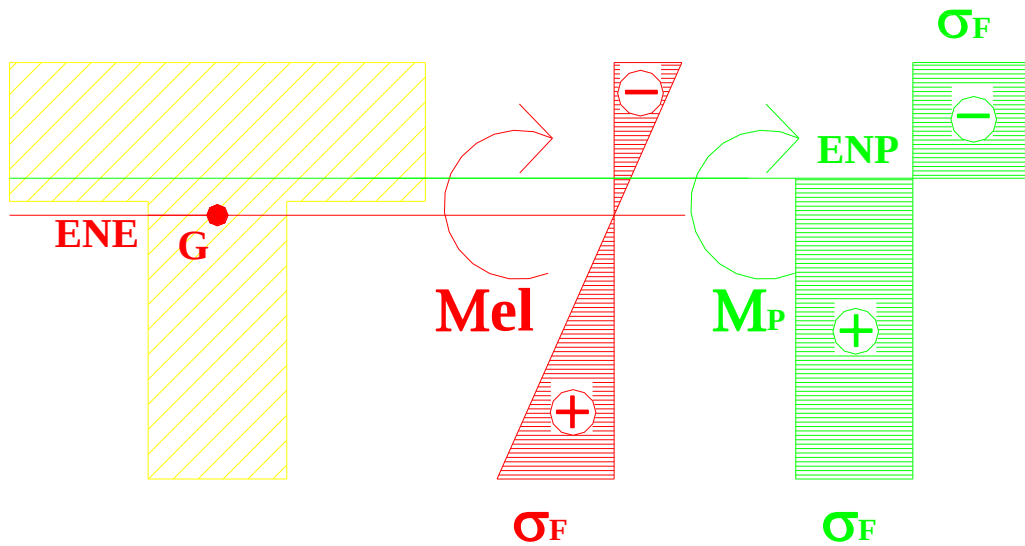
$$J_x = 9,667 a \cdot a^3$$

$$J_{xG} = J_x - F \cdot Y_G^2 = 3.6167 a \cdot a^3$$

$$\sigma_F = M_{el} \cdot Y_{max} / J_{xG} \quad Y_{max} = 19/10 \cdot a$$

$$\Rightarrow M_{el} = 1,9035 \cdot \sigma_F \cdot a^3$$





Determinamos el M_p

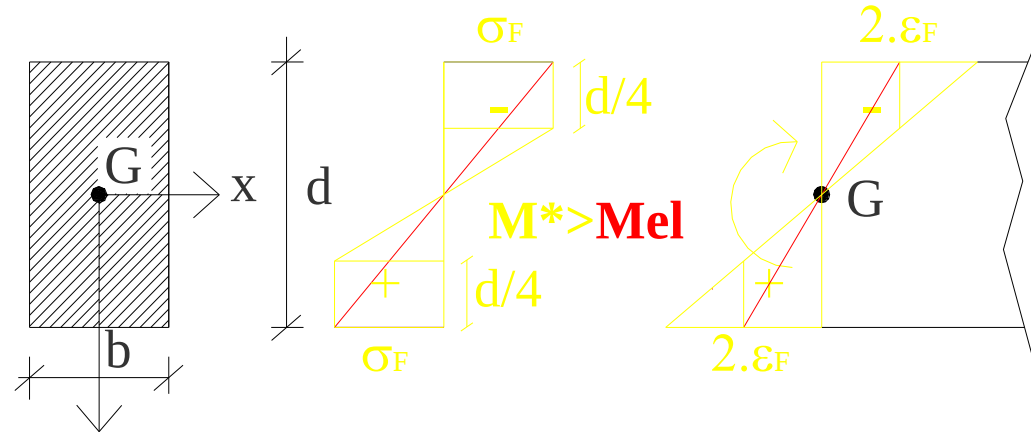
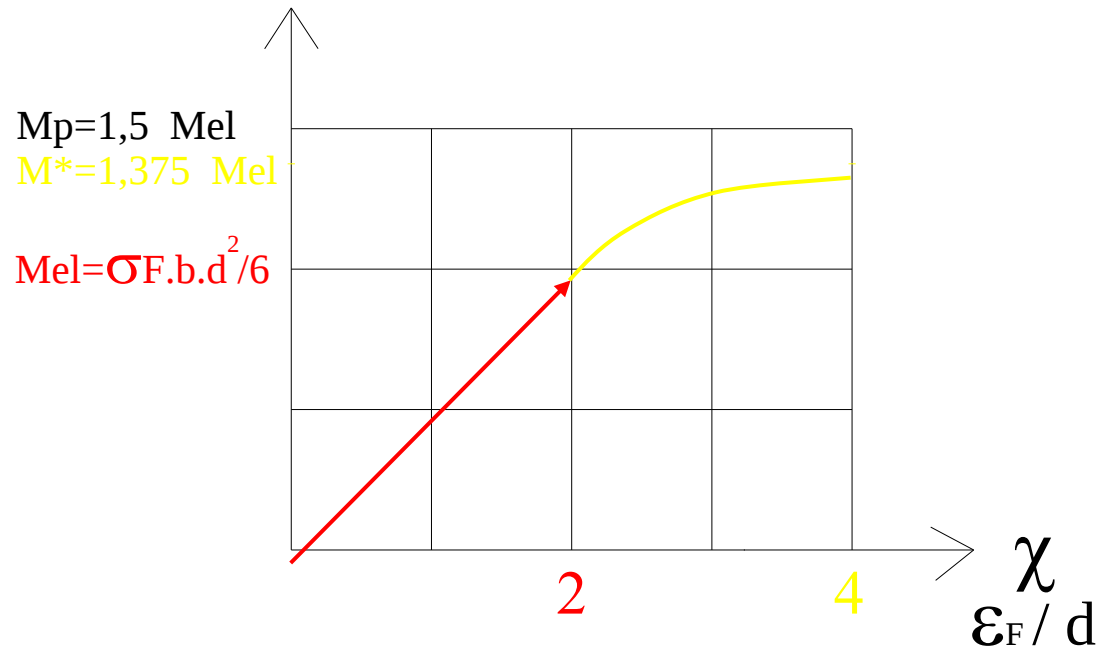
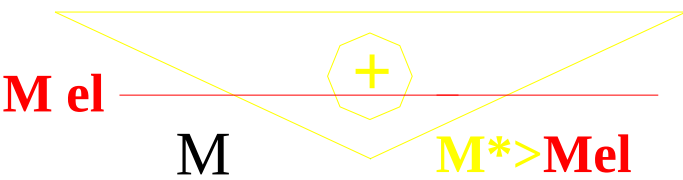
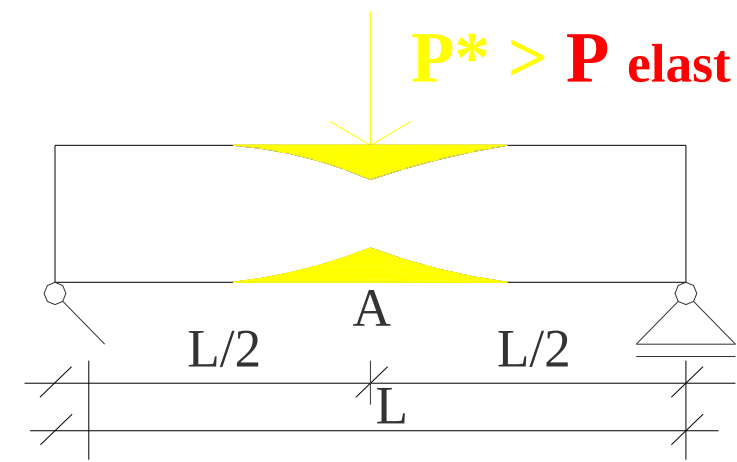
$$M_p = \sigma_F \cdot [S_{n,Ft} + S_{n,Fc}] = \sigma_F \cdot z$$

$$M_p = \sigma_F \cdot [3a \cdot 5/6a \cdot 5/12a + 3a \cdot 1/6a \cdot 1/12a + 2a \cdot a \cdot 7/6a]$$

$$\kappa = M_P / M_{el} = 1,795$$

$$\Rightarrow M_p = 3,4167 \cdot \sigma_F \cdot a^3$$

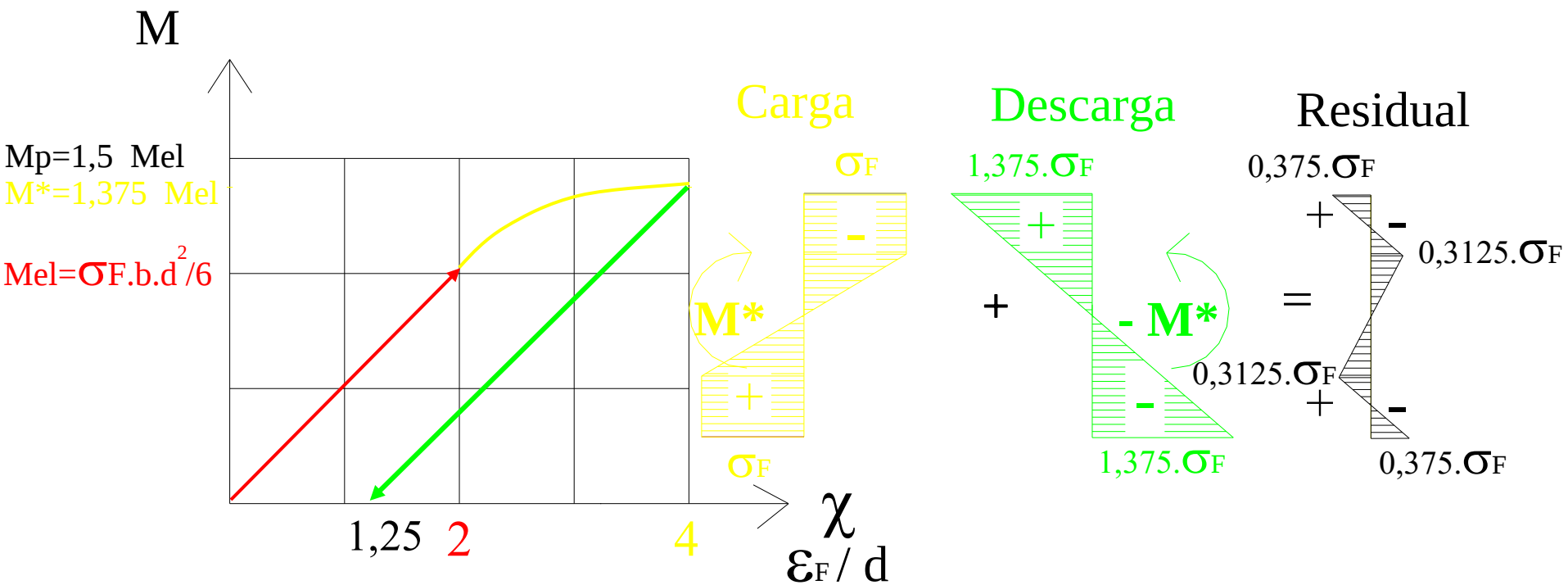
TENSIONES Y DEFORMACIONES RESIDUALES



Procedemos a cargar con P^* para una $p = 0,5$

$$M^* = \sigma_F \cdot [b \cdot d/4 \cdot 3/4d + b/6 \cdot d^2/4] = 11/48 \cdot \sigma_F \cdot b \cdot d^2$$

$$\chi^* = 2 \epsilon_F / (d/2) = 4 \epsilon_F / d$$



Procedemos a descargar - P^* con comportamiento lineal

Calculamos las tensiones máximas y la curvatura en el proceso de descarga

$$\sigma_d = M^* / b \cdot d^2 / 6 = 1,375 \text{ Mel} / b \cdot d^2 / 6 = 1,375 \sigma_F$$

$$\chi_d = 2 \cdot 1,375 \epsilon_F / d = 2,75 \epsilon_F / d$$

Determinamos las tensiones y deformaciones residuales

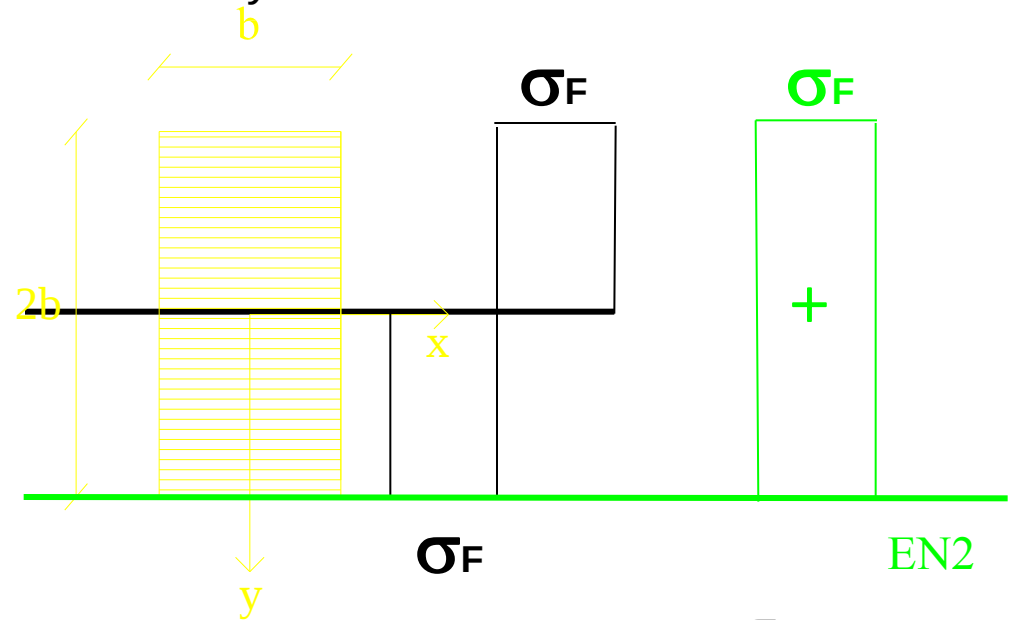
$$\sigma_{res, max} = \sigma_F - 1,375 \sigma_F = 0,375 \sigma_F$$

$$\sigma_{res} = \sigma_F - 1,375 / 2 \sigma_F = (1 - 0,6875) \sigma_F = 0,3125 \sigma_F$$

$$\chi_{res} = \chi_c - \chi_d = (4 - 2,75) \epsilon_F / d = 1,25 \epsilon_F / d$$

BARRAS SOLICITADAS A FLEXIÓN COMPUESTA

Analicemos una sección rectangular de ancho b y altura $2b$



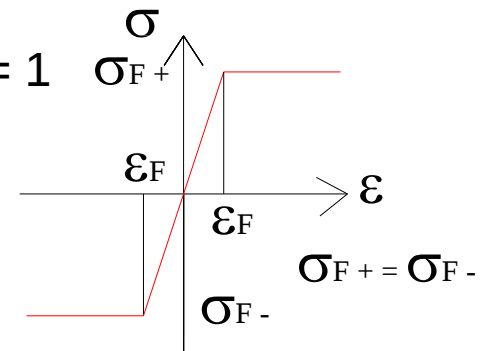
DEFINIMOS UNA CONDICION DE PLASTIFICACION $\Rightarrow p = 1$

ELEGIMOS UN EJE NEUTRO

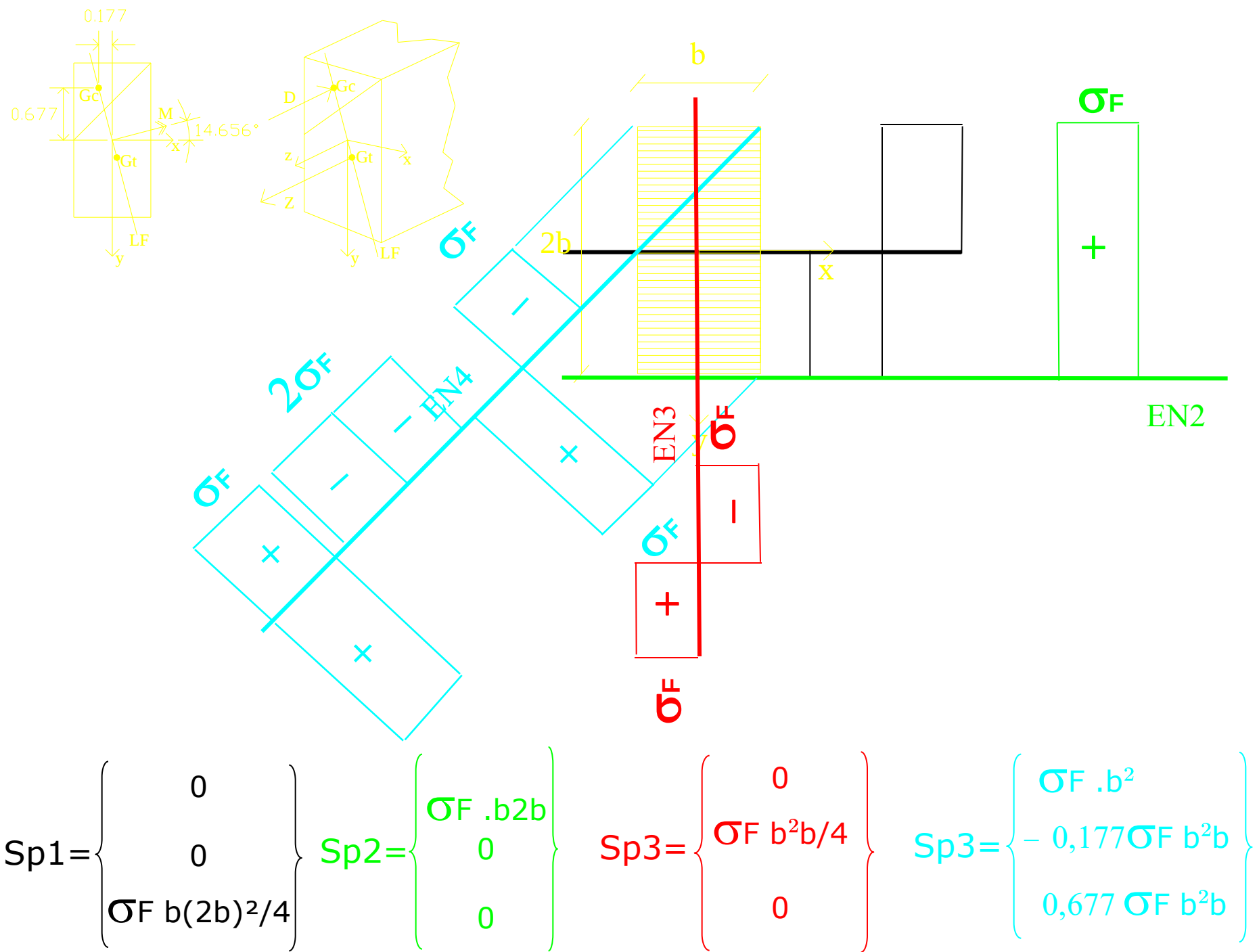
RELACIÓN TENSIÓN - DEFORMACIÓN $\Rightarrow$

PLANTEAMOS LAS ECUACIONES EQUIVALENCIA

DETERMINAMOS LA SOLICITACION ULTIMA DE PLASTIFICACION

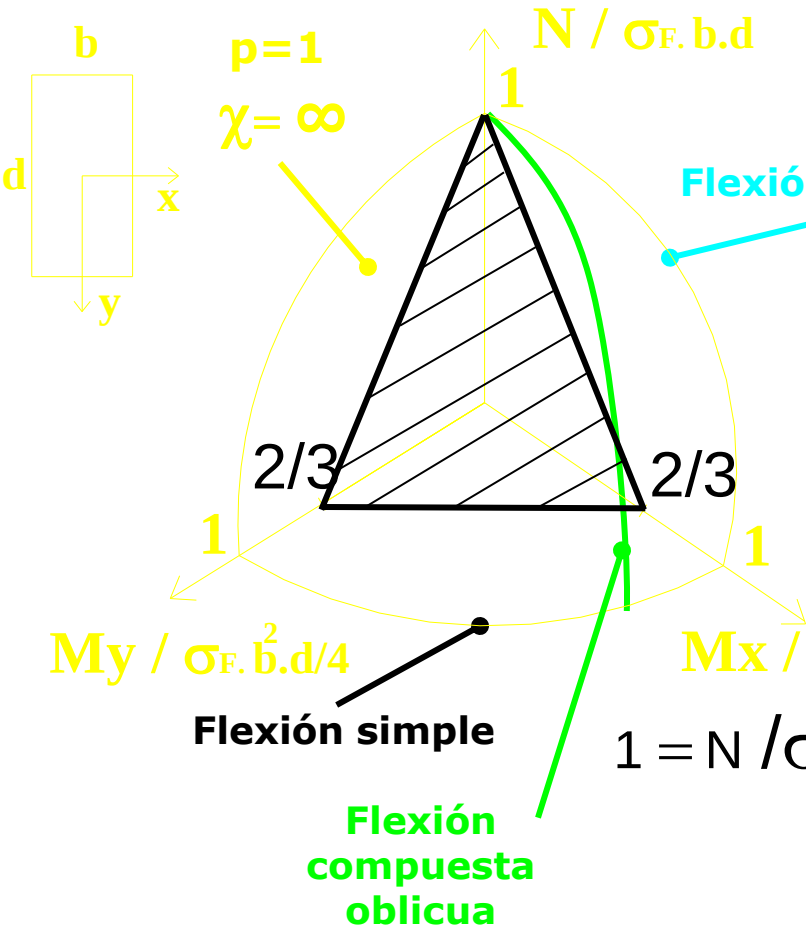


$$Sp1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_F b(2b)^2/4 \end{Bmatrix} \quad Sp2 = \begin{Bmatrix} \sigma_F \cdot b2b \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



SUPERFICIE DE INTERACCION

Representación de todos los posible Sp en un diagrama cartesiano ortogonal



A efectos de hacerlo adimensional dividido por la sollicitación última

Determinemos la superficie de interacción para $p=0$

$$\sigma_{z \max} = N / bd + M_y / bd^2/6 + M_x / b^2d/6$$

Para $p=0$ $\sigma_{z \max} = \sigma_F$

$$1 = N / \sigma_F bd + M_y / \sigma_F bd^2/6 + M_x / \sigma_F b^2d/6$$

$$1 = N / \sigma_F bd + 3/2 M_y / \sigma_F bd^2/4 + 3/2 M_x / \sigma_F b^2d/4$$

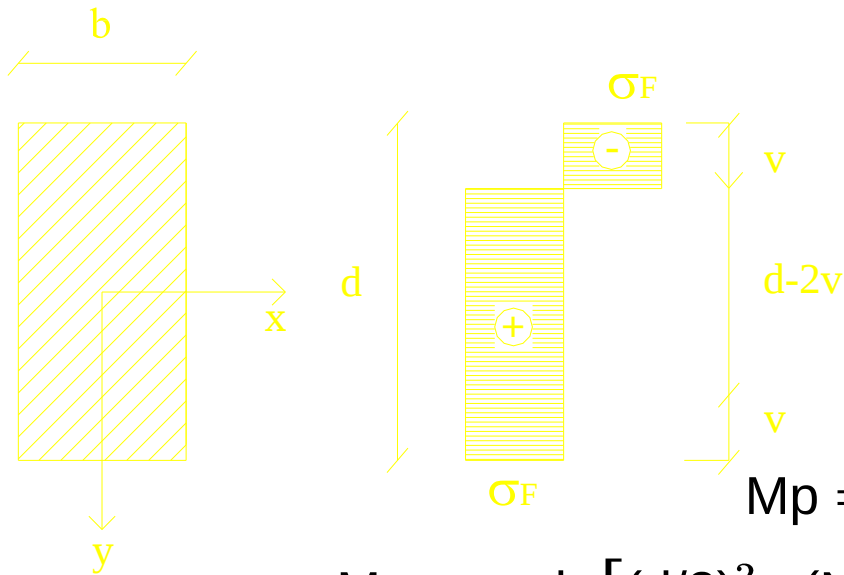
Es la ecuación de un plano

Entre $p = 0$ y $p = 1$ periodo plástico

Por fuera $p = 1$ no es valido, no esta en equilibrio

Busquemos la curva de interacción en el plano $z - x$

FLEXION COMPUESTA RECTA



$$N_p = \sigma_F \cdot b \cdot (d - 2v)$$

$$M_p = \sigma_F \cdot b \cdot v \cdot (d - v)$$

Despejamos v de la 1era. ecuación

$$v = (-N_p / \sigma_F \cdot b + d) \cdot 1/2$$

Reemplazamos v en la 2da. ecuación

$$M_p = \sigma_F \cdot b \cdot (d/2 - N_p / 2 \cdot \sigma_F \cdot b) \cdot (d/2 + N_p / 2 \cdot \sigma_F \cdot b)$$

$$M_p = \sigma_F \cdot b \cdot [(d/2)^2 - (N_p / 2 \cdot \sigma_F \cdot b)^2] = \sigma_F \cdot b \cdot d^2 / 4 \cdot [1 - (N_p / \sigma_F \cdot b \cdot d)^2]$$

$$M_p / \sigma_F \cdot b \cdot d^2 / 4 = 1 - (N_p / 2 \cdot \sigma_F \cdot b)^2$$

El límite elástico

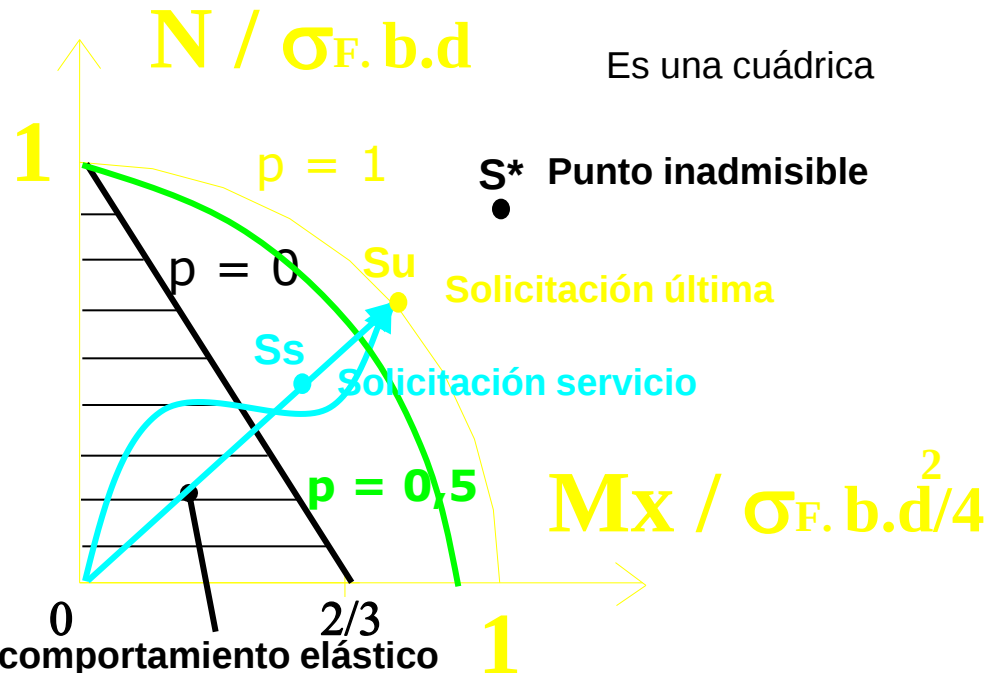
$$1 = N / \sigma_F \cdot b \cdot d + 3/2 M_x / \sigma_F \cdot b^2 \cdot d / 4$$

Adopto una trayectoria de cargas ➡ COMPLEJO

Hipótesis: **CRECIMIENTO PROPORCIONAL DE LAS CARGAS**

Coefficiente de **SEGURIDAD**

$$V_s = 0S_u / 0S_s$$

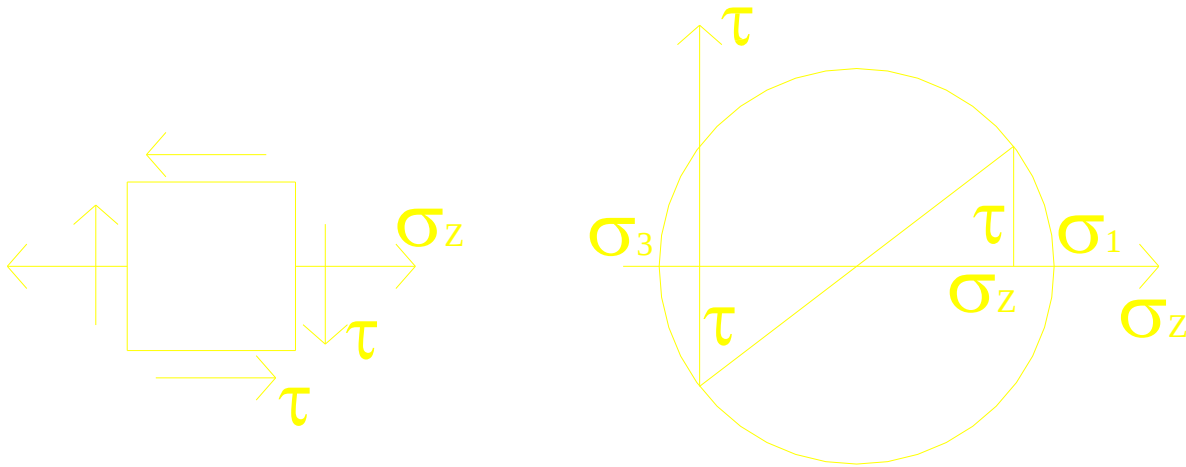


INCIDENCIA DEL CORTE EN LA PLASTIFICACIÓN

Determinamos la relación entre τ_f y σ_f

Aplicamos teoría de máxima energía de distorsión

$$W_d = (1+\mu) / 6E \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq (1+\mu) / 3E \cdot \sigma_F^2$$



$$\sigma_1 = \sigma_z/2 + \sqrt{(\sigma_z/2)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \sigma_z/2 - \sqrt{(\sigma_z/2)^2 + \tau^2}$$

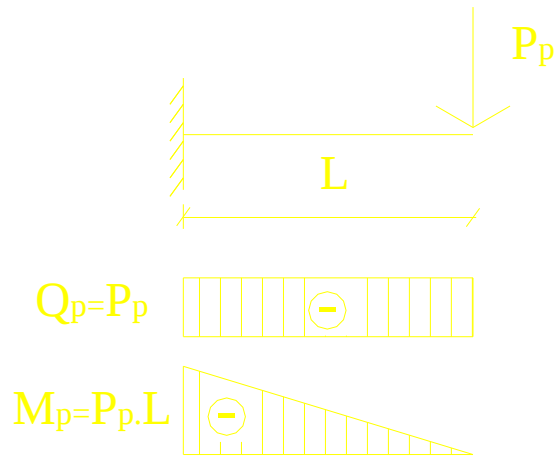
Reemplazamos

$$\sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau^2} = \sigma_F$$

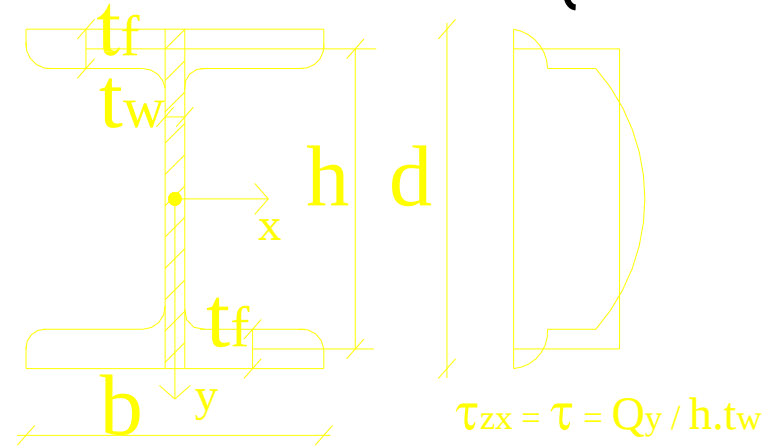
Para las τ_{MAX} debido al Q $\Rightarrow \sigma_z = 0$

$$\tau_F = \sigma_F / \sqrt{3}$$

Analizamos un perfil doble T (depende de la forma la incidencia)



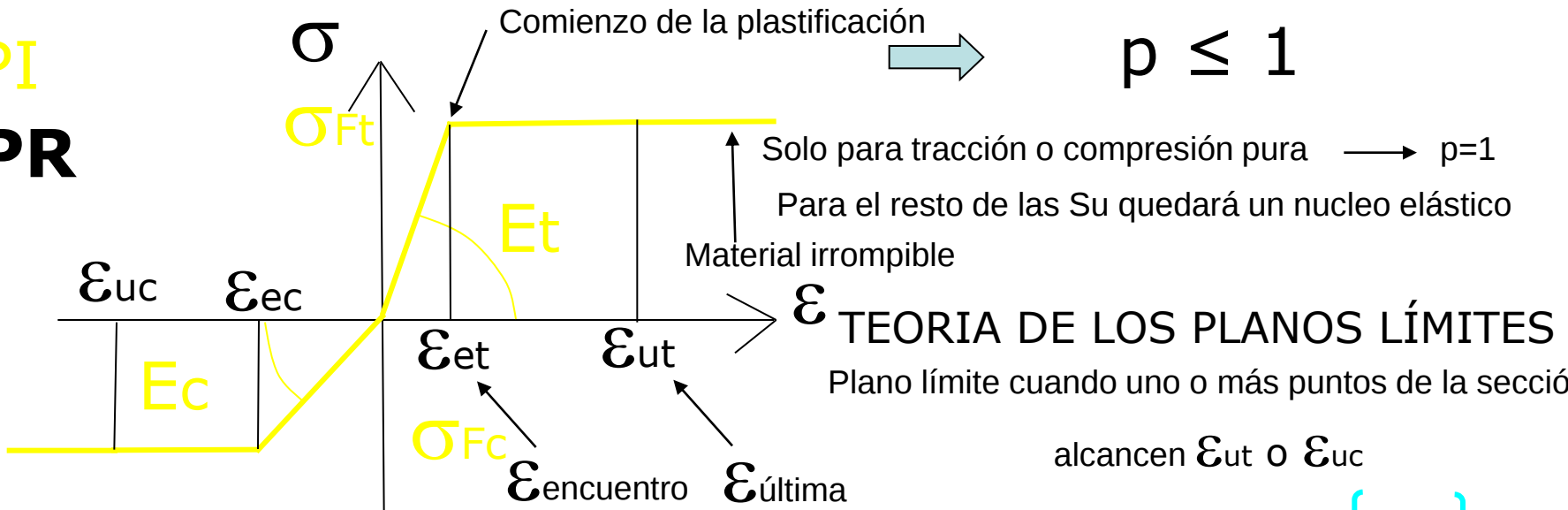
Consideramos (simplificación) $\left\{ \begin{array}{l} \text{alas} \rightarrow \sigma \\ \text{alma} \rightarrow \tau \end{array} \right.$



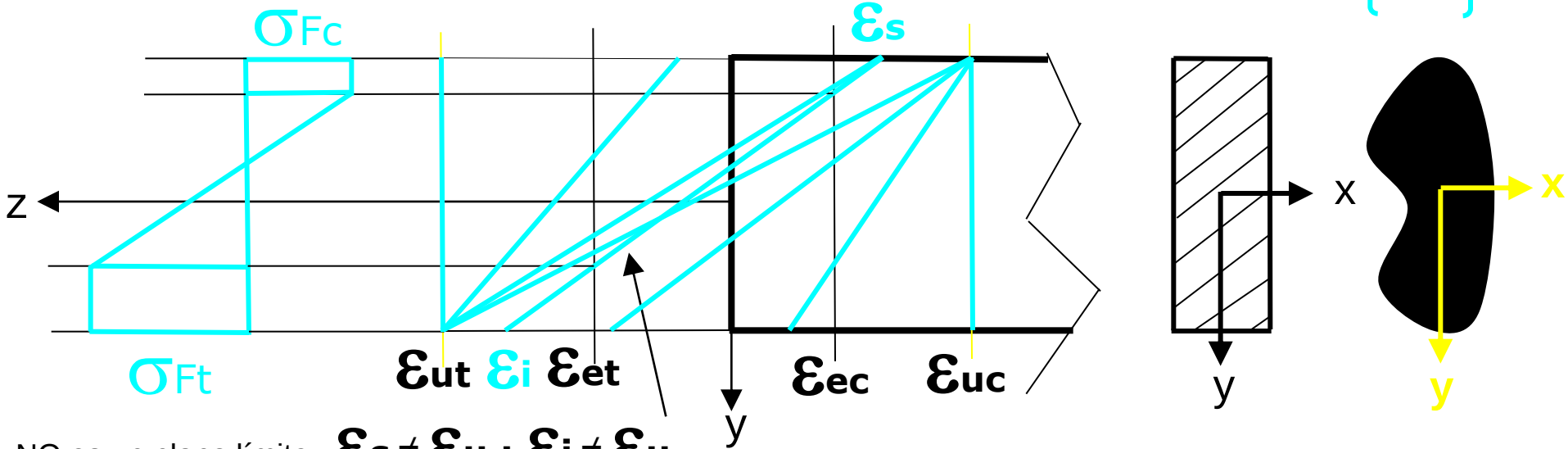
MATERIALES ELASTO PLASTICO REALES - EPR

Si definimos una deformación de rotura o última

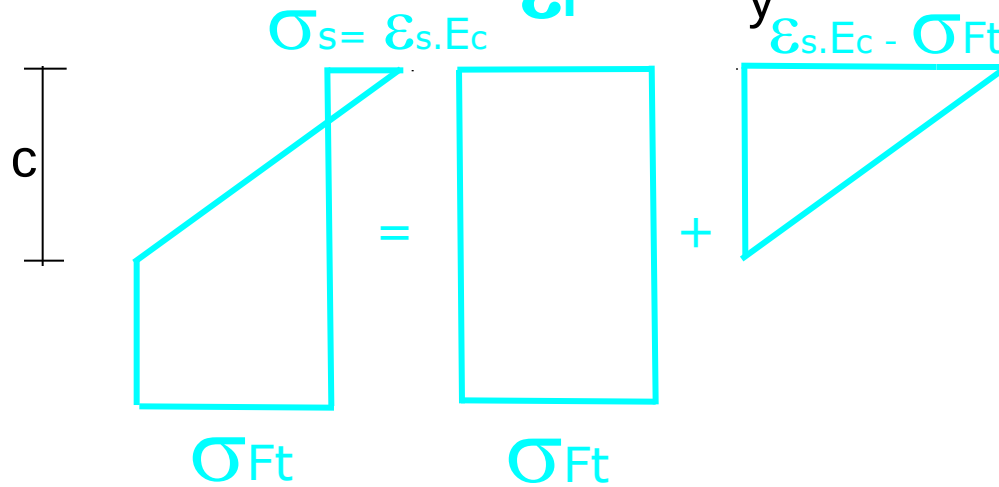
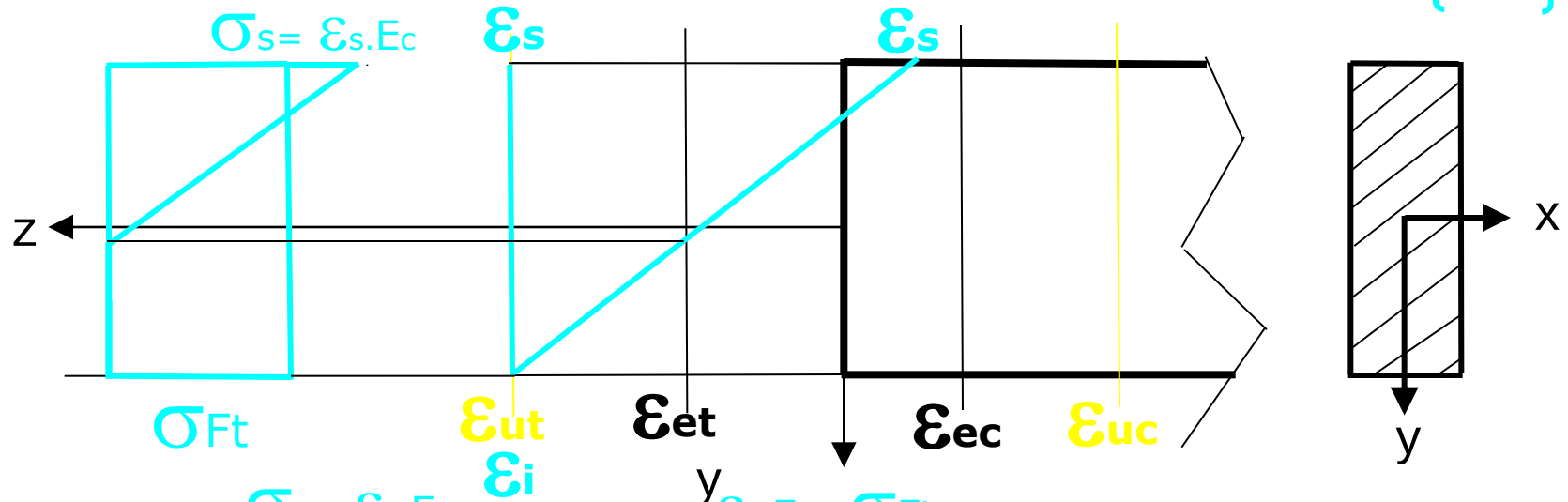
EPI
EPR



Defino un plano de deformaciones $\rightarrow$ Relación $\sigma - \epsilon \rightarrow$ Diagrama de tensiones $\rightarrow \{S_u\}$



Defino un plano de deformaciones $\rightarrow$ Relación $\sigma - \epsilon \rightarrow$ Diagrama de tensiones $\rightarrow \{S_u\}$



para $\epsilon_{et} \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{ec}$

$$d / \epsilon_{ut} - \epsilon_s = c / \epsilon_{et} - \epsilon_s$$

$$S_{u1} = \begin{Bmatrix} \sigma_{Ft} \cdot b \cdot d \\ 0 \end{Bmatrix} \quad S_{u2} = \begin{Bmatrix} \sigma_{Ft} \cdot b \cdot d + (\epsilon_s \cdot E_c - \sigma_{Ft}) \cdot b \cdot c / 2 \\ (\epsilon_s \cdot E_c - \sigma_{Ft}) \cdot b \cdot c / 2 \cdot (-d/2 + 1/3 \cdot c) \end{Bmatrix}$$

Defino un plano de deformaciones



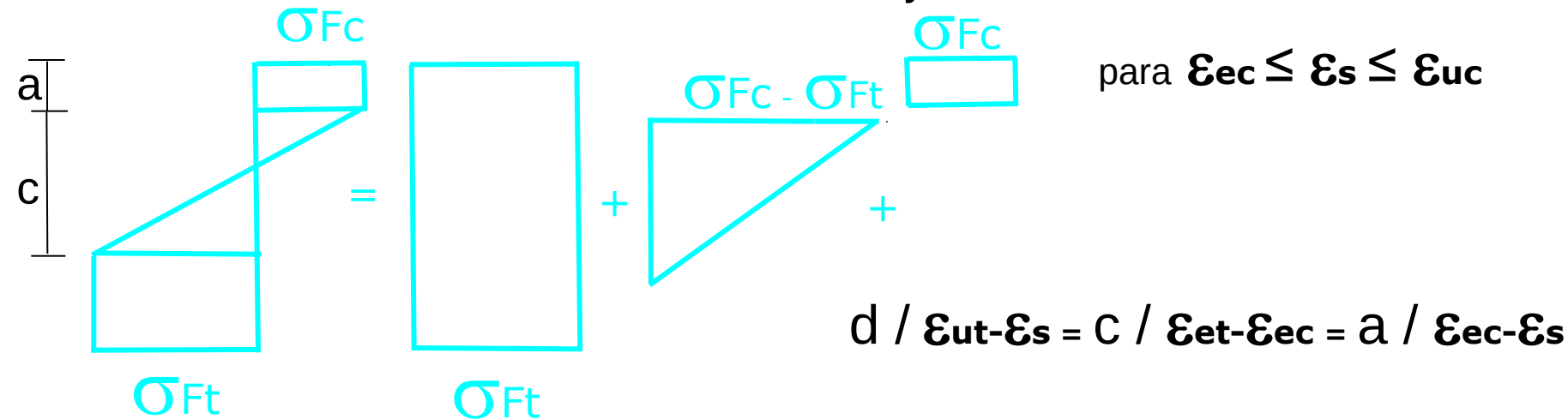
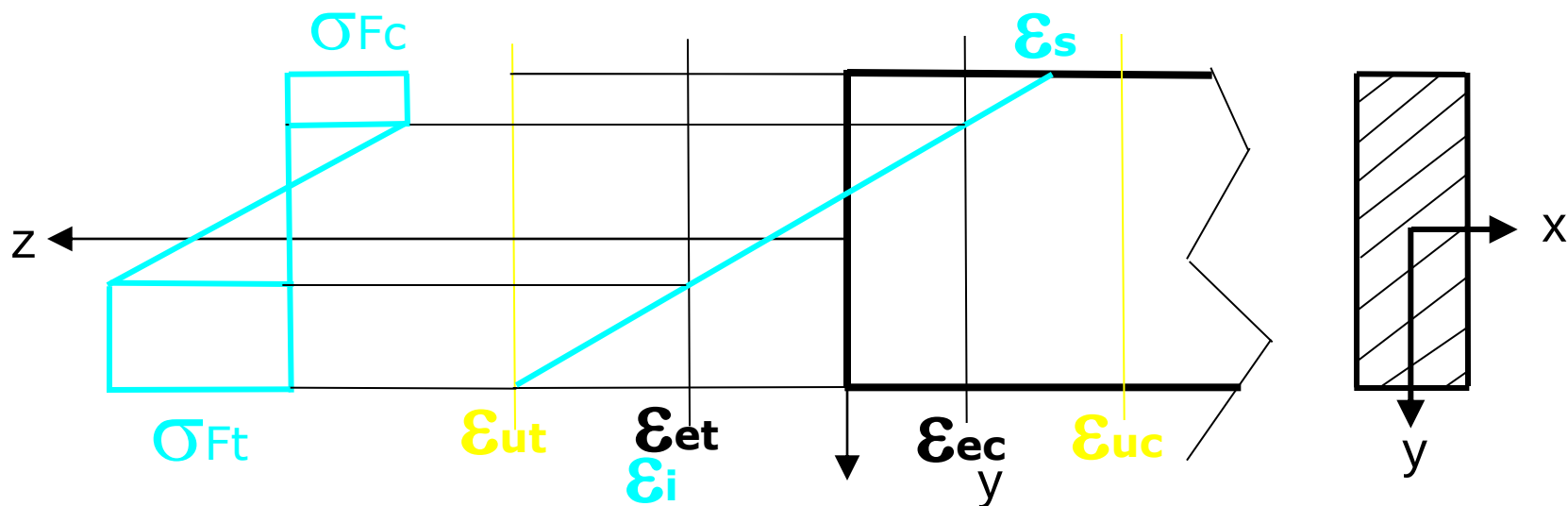
Relación $\sigma - \epsilon$



Diagrama de tensiones



$\{S_u\}$



$$S_{u3} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{Ft} \cdot b \cdot d + (\sigma_{Fc} - \sigma_{Ft}) \cdot b \cdot c / 2 + \sigma_{Fc} \cdot b \cdot a \\ (\sigma_{Fc} - \sigma_{Ft}) \cdot b \cdot c / 2 \cdot (-d/2 + a + 1/3 \cdot c) + \sigma_{Fc} \cdot b \cdot a \cdot (-d/2 + a/2) \end{array} \right\}$$

σ_{uc} (MPa)	σ_{ut} (MPa)	ϵ_{uc} (o/o)	ϵ_{ec} (o/o)	ϵ_{et} (o/o)	ϵ_{ut} (o/o)	E (Mpa)	b (m)	h (m)
-21	420	-3,5	-0,1	2	5	2,10E+05	0,25	0,8

Diagrama de interacción

