Estado de Tensiones - Cambio de Base

Expresar el vector tensión "ρ" asociado al plano "π" en la términos de la terna (O,U,V,W).

Datos:

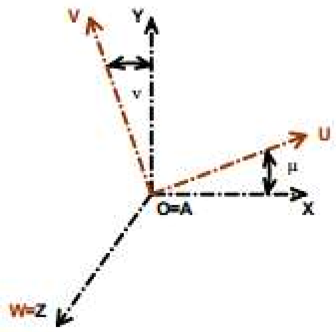
Tensor de Tensiones: $T_T := \begin{pmatrix} -100 & -100 & 0 \\ -100 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{pmatrix} \text{MPa}$

Angulo que forma la normal del plano π con X, Y, Z: $\alpha := 45\text{deg}$ $\beta := 45\text{deg}$ $\gamma := 90\text{deg}$

Angulo que forma U con X: $\mu := 30\text{deg}$

Angulo que forma V con Y: $\upsilon := 30\text{deg}$

Angulo que forma W con Z: $\omega := 0\text{deg}$



Resolución:

Este punto tiene varias formas de realizarse. Veamos algunos:

1)
Calculemos primero el vector "ρ" asociado al plano "π" en la términos de la terna X, Y, Z:

Normal del plano en coordenadas X, Y, Z: $n := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.707107 \\ 0.707107 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vector tensión ρ asociado al plano: $\rho := T_T \cdot n = \begin{pmatrix} -141.421356 \\ -141.421356 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \text{MPa}$ $|\rho| = 200 \cdot \text{MPa}$

Calculemos ahora los versores con direcciones 'u' y 'v', en coordenadas X, Y, Z:

$n_u := \begin{pmatrix} \cos(\mu) \\ \sin(\mu) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.866025 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $n_v := \begin{pmatrix} -\sin(\upsilon) \\ \cos(\upsilon) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.866025 \\ 0 \end{pmatrix}$ $n_w := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Conociendo el vector 'ρ' su componente en 'u' no es nada mas que la proyeccion del vector sobre esa direccion, lo cual podemos calcular como el producto escalar entre esos dos vectores:

$\rho_u := \rho \cdot n_u = -193.185165 \cdot \text{MPa}$ $\rho_v := \rho \cdot n_v = -51.763809 \cdot \text{MPa}$ $\rho_w := \rho \cdot n_w = 0 \cdot \text{MPa}$

2) Una segunda forma de calcular el vector 'ρ' en coordenadas U, V, W es utilizar la matriz de cambio de base. Un cambio de base no es nada más que hacer lo mismo que recien hicimos, pero operando matricialmente.

La matriz de cambio de base de X, Y, Z a U, V, W es la matriz formada por los versores n_x, n_y, n_z en coordenadas U, V, W como columnas.

La matriz de cambio de base de U, V, W a X, Y, Z es la matriz formada por los versores n_u, n_v, n_w en coordenadas X, Y, Z como columnas.

Una matriz es la inversa de la otra, y al ser ortonormales la inversa es igual a la transpuesta.

Queda entonces que la matriz que nosotros necesitamos, la de cambio de base de X, Y, Z a U, V, W resultan los vectores n_u, n_v, n_w en coordenadas X, Y, Z como filas:

$$C_{XU} := \begin{pmatrix} n_{u_1} & n_{u_2} & n_{u_3} \\ n_{v_1} & n_{v_2} & n_{v_3} \\ n_{w_1} & n_{w_2} & n_{w_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.866025 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.866025 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces el vector en coordenadas U, V, W queda: $\rho_{uvw} := C_{XU} \cdot \rho = \begin{pmatrix} -193.185165 \\ -51.763809 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{MPa}$

3) Existe otra forma tambien de calcularlo, que es mucho mas larga y por lo tanto no recomendable.

Obviamente si yo me tomo el trabajo de calcular el tensor de tensiones en coordenadas U, V, W y a su vez hayar la normal del plano π en coordenadas U, V, W al multiplicarlos escalarmente entre si lo que resultaria seria el vector ρ en coordenadas U, V, W.

Tomemosnos el trabajo de hacerlo tan solo para ver como seria el procedimiento. Nuevamente este procedimiento seria mucho mas facil utilizando la matriz de cambio de base para obtener el Tensor de Tensiones y el versor de la normal del plano π en coordenadas U, V; pero hagamos de cuenta que no recordamos esto de algebra y calculemos de modo largo, manual y tedioso. Haremos el calculo de todas formas sabiendo que por suerte Z y W son la misma direccion, y es una direccion principal, sino seria aun mas complicado este método:

Vector tensión ρ asociado a u: $\rho := T_T \cdot n_u = \begin{pmatrix} -136.60254 \\ -136.60254 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{MPa}$ $\quad |\rho| = 193.185165 \cdot \mathrm{MPa}$

Vector σ asociado a u: $\sigma := \rho \cdot n_u \cdot n_u = \begin{pmatrix} -161.60254 \\ -93.30127 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{MPa}$ $\quad \sigma_u := -|\sigma| = -186.60254 \cdot \mathrm{MPa}$

Vector τ asociado a u: $\tau := \rho - \sigma = \begin{pmatrix} 25 \\ -43.30127 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{MPa}$ $\quad \tau_{uv} := -|\tau| = -50 \cdot \mathrm{MPa}$

Vector tensión ρ asociado a v: $\rho := T_T \cdot n_v = \begin{pmatrix} -36.60254 \\ -36.60254 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot MPa$ $\quad |\rho| = 51.763809 \cdot MPa$

Vector σ asociado a v: $\sigma := \rho \cdot n_v \cdot n_v = \begin{pmatrix} 6.69873 \\ -11.60254 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot MPa$ $\quad \sigma_v := -|\sigma| = -13.39746 \cdot MPa$

Vector τ asociado a v: $\tau := \rho - \sigma = \begin{pmatrix} -43.30127 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot MPa$ $\quad \tau_{uv} := -|\tau| = -50 \cdot MPa$

Notemos que es muy importante que el τ_{uv} dio el mismo valor por ambos caminos recien hechos.

Vector tensión ρ asociado a w: $\rho := T_T \cdot n_w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot MPa$ $\quad |\rho| = 60 \cdot MPa$

Vector σ asociado a w: $\sigma := \rho \cdot n_w \cdot n_w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot MPa$ $\quad \sigma_w := |\sigma| = 60 \cdot MPa$

Entonces el Tensor de Tensiones en coordenadas U, V, W resulta:

$$T_{Tuvw} := \begin{pmatrix} \sigma_u & \tau_{uv} & 0 \\ \tau_{uv} & \sigma_v & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -186.60254 & -50 & 0 \\ -50 & -13.39746 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{pmatrix} \cdot MPa$$

Si hubieramos utilizado las matrices de cambio de base deberiamos haber hecho directamente:

$$T_{Tuvw} := C_{XU} \cdot T_T \cdot C_{XU}^T = \begin{pmatrix} -186.60254 & -50 & 0 \\ -50 & -13.39746 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{pmatrix} MPa$$

Ahora debemos hayar la normal del plano π en coordenadas U, V, W:

$$n_{\pi uvw} := \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \mu) \\ \cos(\beta + \mu) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.965926 \\ 0.258819 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente: $\rho_{uvw} := T_{Tuvw} \cdot n_{\pi uvw} = \begin{pmatrix} -193.185165 \\ -51.763809 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot MPa$