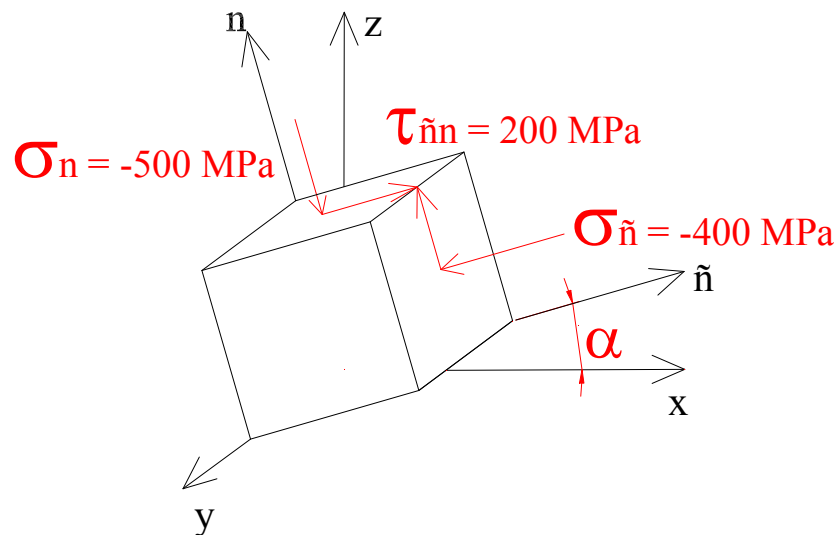


En la figura se indica 2 planos perpendiculares $\mathbf{n}$ y $\tilde{\mathbf{n}}$, del que se conocen las componentes de tensión asociados a cada uno de ellos, y estando impedido de deformarse el 3er plano perpendicular se pide:

- 1) Calcular los Tensores de Tensión y de Deformación según los ejes $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ e indicar que Estados Tensional y de Deformación se tienen
- 2) Calcular los Tensores de Tensión y de Deformación Principales e indicar en las Circunferencias de Tensiones todos los valores importantes, incluso los asociados a los planos $\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{n}}$ y $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$
- 3) Aprovechar las Circunferencias de Tensiones como de Deformaciones.- Señalar valores notables e indicar $\epsilon_n, \gamma_n, \epsilon_{\tilde{n}}$ y $\gamma_{\tilde{n}}$, componentes de Deformaciones de los vectores Globales de dirección $\mathbf{n}$ y $\tilde{\mathbf{n}}$ (δ_{gn} y $\delta_{g\tilde{n}}$), verificando analíticamente por los menos un vector global δ_{gn} y sus componentes ϵ_n, γ_n .-
- 4) Descomponer el Tensor de deformación según los ejes $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ en un Tensor Esférico y un Tensor desviador, representando el cubo deformado y sin deformar según los ejes $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ para cada tensor por separado
- 5) Indicar en un cubo elemental orientado de acuerdo a alguna de las ternas de ejes encontrados en puntos anteriores, el plano de $\tau_{\max}$, dibujando el vector ρ asociado, y sus componentes de tensión, con los valores que Ud. indicará.-



DATOS

$E := 210000$	$\mu := 0.3$	$\underline{\underline{G}} := \frac{E}{2(1 + \mu)}$	$G = 8.08 \times 10^4$
$\sigma_n := -500$	$\sigma_{\tilde{n}} := -400$	$\tau_{\tilde{n}n} := 200$	$\alpha := 37 \cdot \frac{\pi}{180}$
$\epsilon_y := 0$	$\gamma_{ny} := 0$	$\gamma_{\tilde{n}y} := 0$	

1) Calcular los Tensores de Tensión y de Deformación según los ejes $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ e indicar que Estados Tensional y de Deformación se tienen.-

Definimos

$$T_{\tilde{n}yn} := \begin{pmatrix} \sigma_{\tilde{n}} & \tau_{\tilde{n}y} & \tau_{\tilde{n}n} \\ \tau_{\tilde{n}y} & \sigma_y & \tau_{ny} \\ \tau_{\tilde{n}n} & \tau_{ny} & \sigma_n \end{pmatrix} \quad D_{\tilde{n}yn} := \begin{pmatrix} \epsilon_{\tilde{n}} & \frac{\gamma_{\tilde{n}y}}{2} & \frac{\gamma_{\tilde{n}n}}{2} \\ \frac{\gamma_{\tilde{n}y}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{ny}}{2} \\ \frac{\gamma_{\tilde{n}n}}{2} & \frac{\gamma_{ny}}{2} & \epsilon_n \end{pmatrix}$$

Guess values

$$\begin{array}{lll} \sigma_y := 150 & \tau_{ny} := 10 & \tau_{\tilde{n}y} := 10 \\ \epsilon_{\tilde{n}} := 0.0001 & \epsilon_n := 0.0001 & \gamma_{\tilde{n}n} := 0.001 \end{array}$$

Given

$$\epsilon_{\tilde{n}} = \frac{\sigma_{\tilde{n}}}{E} - \sigma_y \cdot \frac{\mu}{E} - \sigma_n \cdot \frac{\mu}{E} \quad \gamma_{\tilde{n}y} = \frac{\tau_{\tilde{n}y}}{G}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \sigma_{\tilde{n}} \cdot \frac{\mu}{E} - \sigma_n \cdot \frac{\mu}{E} \quad \gamma_{ny} = \frac{\tau_{ny}}{G}$$

$$\epsilon_n = \frac{\sigma_n}{E} - \sigma_{\tilde{n}} \cdot \frac{\mu}{E} - \sigma_y \cdot \frac{\mu}{E} \quad \gamma_{\tilde{n}n} = \frac{\tau_{\tilde{n}n}}{G}$$

$$X := \text{Find}(\sigma_y, \tau_{ny}, \tau_{\tilde{n}y}, \epsilon_{\tilde{n}}, \epsilon_n, \gamma_{\tilde{n}n})$$

$$X = \begin{pmatrix} -270 \\ 0 \\ 0 \\ -8.048 \times 10^{-4} \\ -1.424 \times 10^{-3} \\ 2.476 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lll} \sigma_{\tilde{n}} := -270 & \tau_{\tilde{n}y} := 0 & \tau_{\tilde{n}n} := 0 \\ \epsilon_{\tilde{n}} := -8.048 \times 10^{-4} & \epsilon_y := -1.424 \times 10^{-3} & \epsilon_n := 2.476 \times 10^{-3} \end{array}$$

$$T_{\tilde{n}yn} := \begin{pmatrix} \sigma_{\tilde{n}} & \tau_{\tilde{n}y} & \tau_{\tilde{n}n} \\ \tau_{\tilde{n}y} & \sigma_y & \tau_{ny} \\ \tau_{\tilde{n}n} & \tau_{ny} & \sigma_n \end{pmatrix} \quad T_{\tilde{n}yn} = \begin{pmatrix} -400 & 0 & 200 \\ 0 & -270 & 0 \\ 200 & 0 & -500 \end{pmatrix} \quad \text{eigenvals}(T_{\tilde{n}yn}) = \begin{pmatrix} -243.845 \\ -656.155 \\ -270 \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{n}yn} := \begin{pmatrix} \varepsilon_{\tilde{n}} & \frac{\gamma_{\tilde{n}y}}{2} & \frac{\gamma_{\tilde{n}n}}{2} \\ \frac{\gamma_{\tilde{n}y}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{ny}}{2} \\ \frac{\gamma_{\tilde{n}n}}{2} & \frac{\gamma_{ny}}{2} & \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad D_{\tilde{n}yn} = \begin{pmatrix} -8.048 \times 10^{-4} & 0 & 1.238 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1.238 \times 10^{-3} & 0 & -1.424 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} n_{\tilde{n}} &:= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} & n_y &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & n_n &:= \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ 0 \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ n_x &:= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix} & n_z &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & n_z &:= \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ 0 \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \text{Rot} := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\rho_x := T_{\tilde{n}yn} \cdot n_x \quad \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} := \text{Rot} \cdot \rho_x \quad \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -628.47 \\ 0 \\ 103.191 \end{pmatrix}$$

$$\rho_y := T_{\tilde{n}yn} \cdot n_y \quad \begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} := \text{Rot} \cdot \rho_y \quad \begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -270 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_z := T_{\tilde{n}yn} \cdot n_z \quad \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{pmatrix} := \text{Rot} \cdot \rho_z \quad \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 103.191 \\ 0 \\ -271.53 \end{pmatrix}$$

$$T_{xyz} := \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad T_{xyz} = \begin{pmatrix} -628.47 & 0 & 103.191 \\ 0 & -270 & 0 \\ 103.191 & 0 & -271.53 \end{pmatrix}$$

$$T_{xyz} := \text{Rot} \cdot T_{\tilde{n}yn} \cdot \text{Rot}^T \quad T_{xyz} = \begin{pmatrix} -628.47 & 0 & 103.191 \\ 0 & -270 & 0 \\ 103.191 & 0 & -271.53 \end{pmatrix}$$

$$D_{xyz} := \text{Rot} \cdot D_{\tilde{n}yn} \cdot \text{Rot}^T \quad D_{xyz} = \begin{pmatrix} -2.219 \times 10^{-3} & 0 & 6.388 \times 10^{-4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 6.388 \times 10^{-4} & 0 & -9.695 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

2) Calcular los Tensores de Tensión y de Deformación Principales e indicar en las Circunferencias de Tensiones todos los valores importantes, incluso los asociados a los planos **n**, **$\tilde{n}$** y **x,y,z**

$$\text{eigenvals}(T_{xyz}) = \begin{pmatrix} -656.155 \\ -243.845 \\ -270 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \sigma_1 &:= -243.845 \\ \sigma_2 &:= -270 \\ \sigma_3 &:= -656.155 \end{aligned}$$

$$T_{123} := \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad T_{123} = \begin{pmatrix} -243.845 & 0 & 0 \\ 0 & -270 & 0 \\ 0 & 0 & -656.155 \end{pmatrix}$$

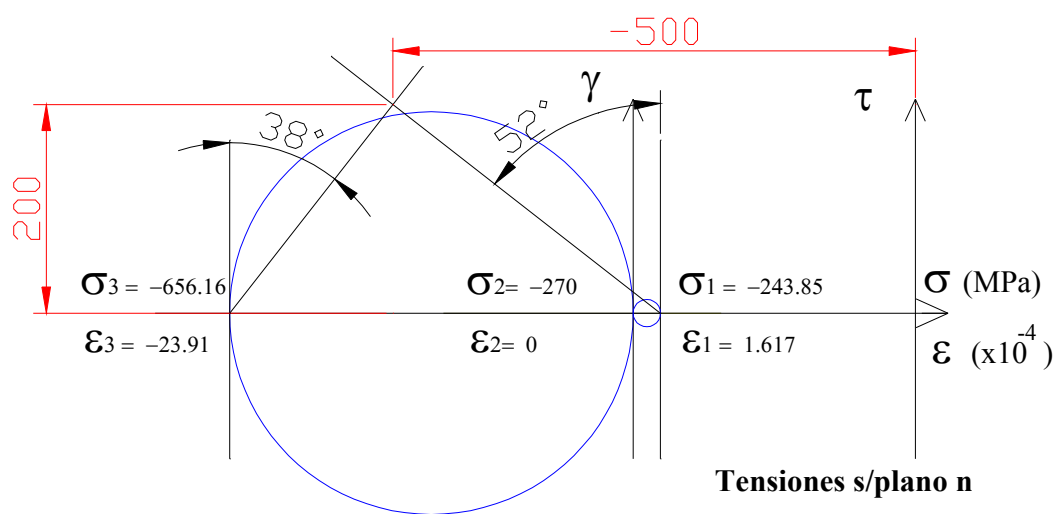
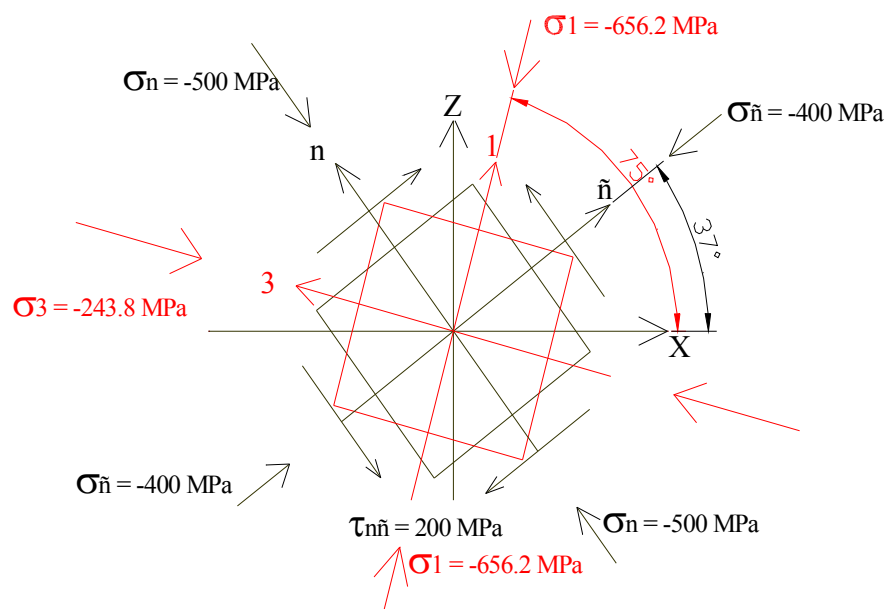
$$\text{eigenvec}(T_{xyz}, -243.845) = \begin{pmatrix} 0.259 \\ 0 \\ 0.966 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \arccos(0.259) &= 74.989 \cdot \text{deg} \\ \arccos(0.966) &= 14.984 \cdot \text{deg} \end{aligned}$$

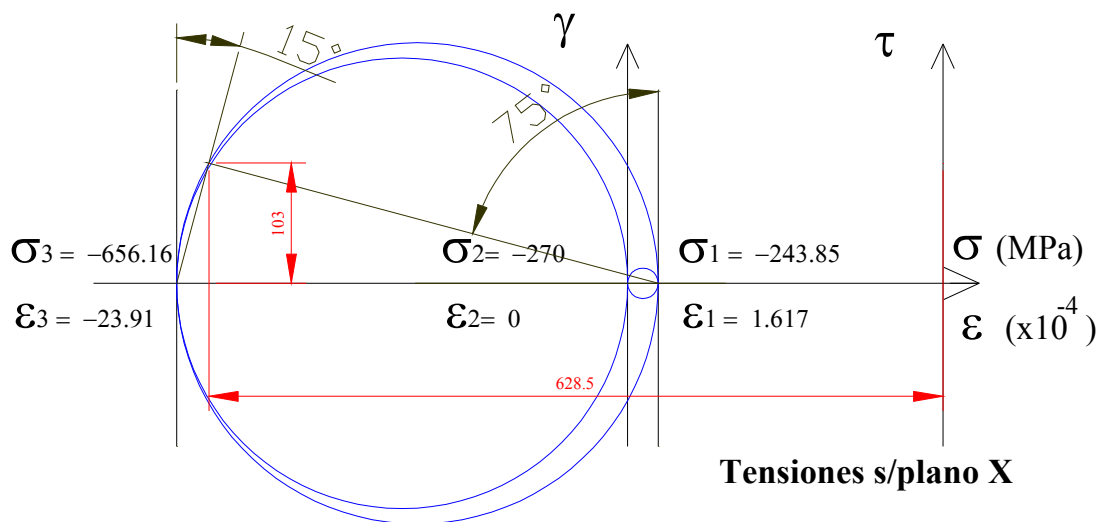
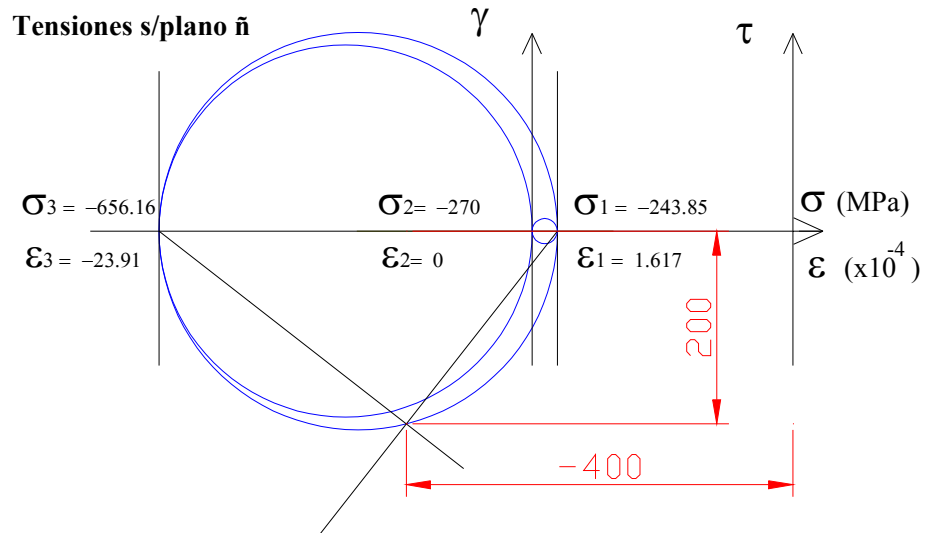
$$\text{eigenvec}(T_{xyz}, -270) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

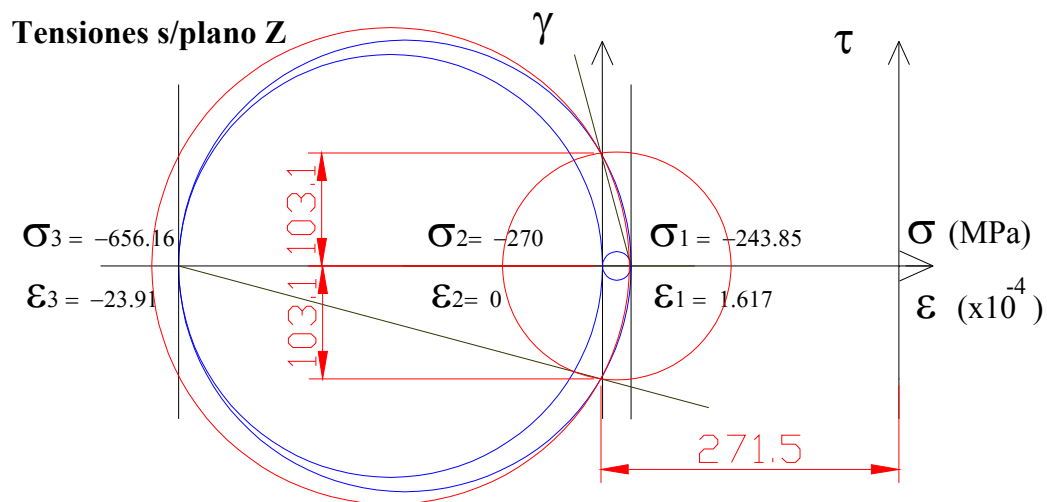
$$\text{eigenvec}(T_{xyz}, -656.155) = \begin{pmatrix} 0.966 \\ 0 \\ -0.259 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \arccos(0.966) &= 14.984 \cdot \text{deg} \\ \arccos(-0.259) &= 105.011 \cdot \text{deg} \end{aligned}$$

$$\text{eigenvals}(D_{\tilde{n}yn}) = \begin{pmatrix} 1.617 \times 10^{-4} \\ -2.391 \times 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \epsilon_1 &:= 1.617 \times 10^{-4} \\ \epsilon_2 &:= 0 \\ \epsilon_3 &:= -2.391 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

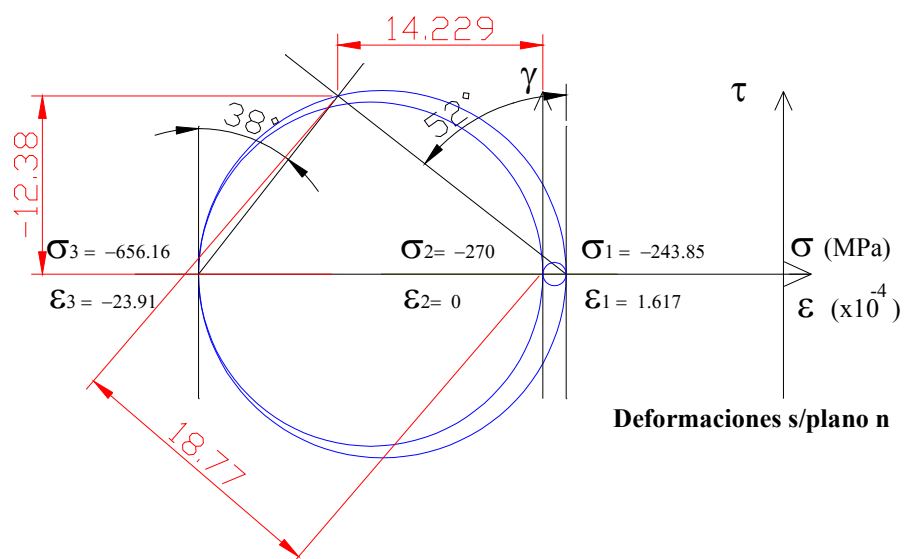
$$D_{123} := \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad D_{123} = \begin{pmatrix} 1.617 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.391 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$





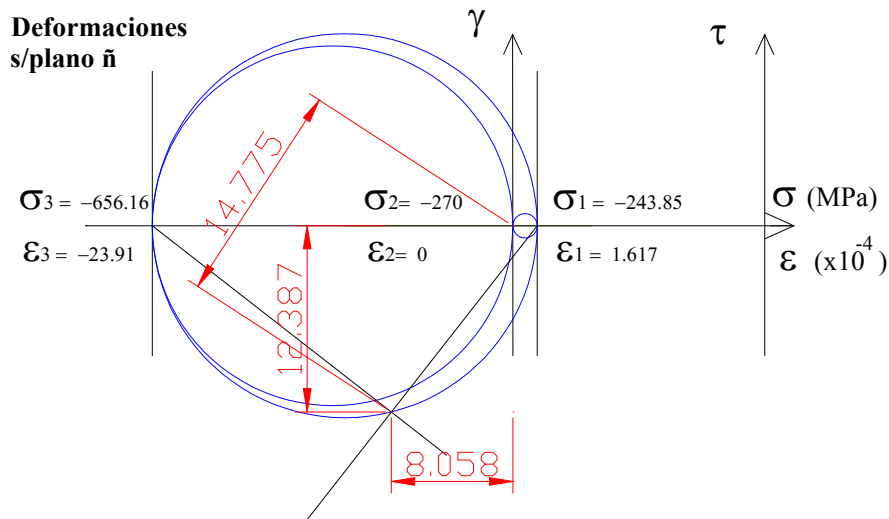


3) Aprovechar las Circunferencias de Tensiones como de Deformaciones.- Señalar valores notables e indicar ϵ_n , γ_n , $\epsilon_{\tilde{n}}$ y $\gamma_{\tilde{n}}$, componentes de Deformaciones de los vectores Globales de dirección $\mathbf{n}$ y $\tilde{\mathbf{n}}$ (δg_n y $\delta g_{\tilde{n}}$), verificando analíticamente por los menos un vector global δg_n y sus componentes ϵ_n , γ_n .-



Analíticamente

$$\varepsilon_{\tilde{n}} = -8.048 \times 10^{-4} \quad \frac{\gamma_{\tilde{n}\tilde{n}}}{2} = 1.238 \times 10^{-3} \quad \delta g_{\tilde{n}} := \sqrt{\varepsilon_{\tilde{n}}^2 + \left(\frac{\gamma_{\tilde{n}\tilde{n}}}{2}\right)^2} \quad \delta g_{\tilde{n}} = 1.477 \times 10^{-3}$$



Analíticamente

$$\varepsilon_{\tilde{n}} = -8.048 \times 10^{-4} \quad \frac{\gamma_{\tilde{n}\tilde{n}}}{2} = 1.238 \times 10^{-3} \quad \delta g_{\tilde{n}} := \sqrt{\varepsilon_{\tilde{n}}^2 + \left(\frac{\gamma_{\tilde{n}\tilde{n}}}{2}\right)^2} \quad \delta g_{\tilde{n}} = 1.477 \times 10^{-3}$$

4) Descomponer el Tensor de deformación según los ejes **x,y,z** en un Tensor Esférico y un Tensor desviador, representando el cubo deformado y sin deformar según los ejes **x,y,z** para cada tensor por separado

Determinamos la deformación específica volumétrica

$$\varepsilon_v := \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} \quad \varepsilon_v = -7.431 \times 10^{-4}$$

Tensor esférico

$$T_{de} := \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_v}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_v}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_v}{3} \end{pmatrix} \quad T_{de} = \begin{pmatrix} -2.477 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & -2.477 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & -2.477 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Tensor desviador

$$T_{dd} := \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_v}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_v}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_v}{3} \end{pmatrix} \quad T_{dd} = \begin{pmatrix} 4.094 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 2.477 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & -2.143 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$