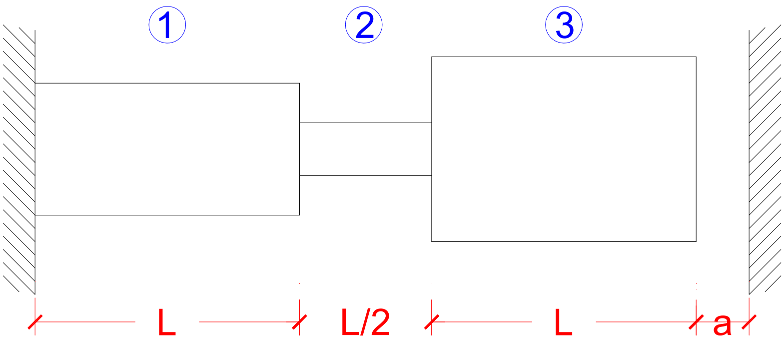
Ejercicio resuelto - Solicitación axil:



Datos: Longitud de las barras: $L := 2m$

Deficiencia de montaje: $a := 5 \cdot mm$

Áreas: $A_1 := 4cm^2$ $A_2 := 2cm^2$ $A_3 := 6cm^2$

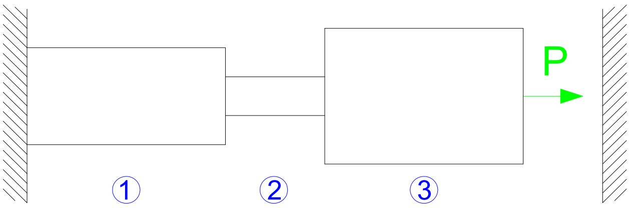
Coeficiente de dilatación térmico: $\lambda := 1 \cdot 10^{-5}$

Módulo de elasticidad longitudinal: $E := 210000MPa$

- Calcule las tensiones y deformaciones en las barras luego de solucionar la deficiencia de montaje.

Resolución: Opción 1

Una manera de solventar el problema de montaje es calcular la carga P necesaria para desplazar el extremo derecho una distancia "a". Esta fuerza será la fuerza que finalmente deberá tomar el vinculo.



Lo que debemos buscar es el valor de la carga P que genera un desplazamiento total igual a "a". El desplazamiento total es la suma de los desplazamientos de cada barra.

$$\Delta L = a = \frac{N_1 \cdot L}{A_1 \cdot E} + \frac{N_2 \cdot \frac{L}{2}}{A_2 \cdot E} + \frac{N_3 \cdot L}{A_3 \cdot E}$$

Por equilibro el esfuerzo axil de todas las barras es el mismo. Por lo tanto resulta:

$$a = \frac{N \cdot L}{E} \cdot \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{2 \cdot A_2} + \frac{1}{A_3} \right) \qquad N := \frac{a \cdot E}{L \cdot \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{2 \cdot A_2} + \frac{1}{A_3} \right)} = 78.75\, kN$$

Las tensiones para cada barra resultan entonces:

$$\sigma_1 := \frac{N}{A_1} = 196.875 \cdot MPa \qquad \sigma_2 := \frac{N}{A_2} = 393.75 \cdot MPa \qquad \sigma_3 := \frac{N}{A_3} = 131.25 \cdot MPa$$

Por su lado las deformaciones de cada barra son:

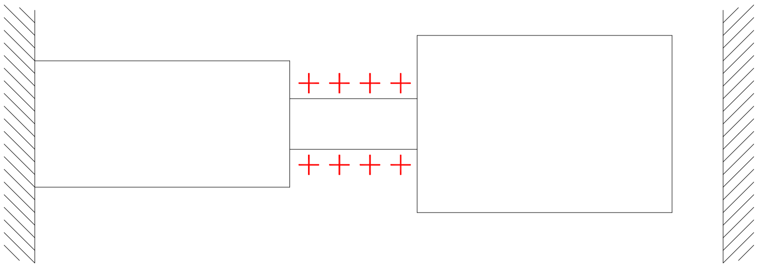
$$\varepsilon_1 := \frac{\sigma_1}{E} = 9.375 \times 10^{-4} \qquad \varepsilon_2 := \frac{\sigma_2}{E} = 1.875 \times 10^{-3} \qquad \varepsilon_3 := \frac{\sigma_3}{E} = 6.25 \times 10^{-4}$$

Finalmente los desplazamientos parciales en los extremos derechos de cada barra son:

$$u_1 := \varepsilon_1 \cdot L = 1.875 \cdot mm \qquad u_2 := u_1 + \varepsilon_2 \cdot \frac{L}{2} = 3.75 \cdot mm \qquad u_3 := u_2 + \varepsilon_3 \cdot L = 5 \cdot mm$$

Resolución: Opción 2

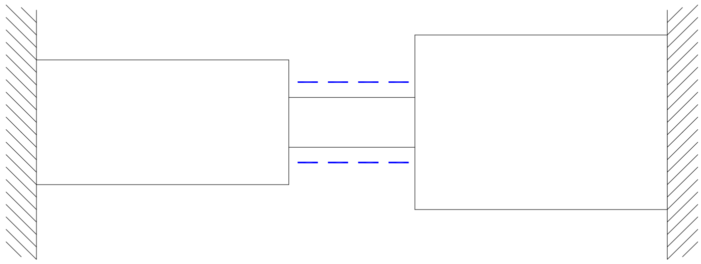
Otra manera de solventar el problema de montaje podría ser calentar una o varias barras para lograr un desplazamiento en el extremo igual a "a", y luego quitar dicha diferencia de temperatura. En este caso vamos a calentar la barra central.



Calculamos en primer lugar el valor de la temperatura ΔT que genera un desplazamiento total igual a "a".

$$a = \lambda \cdot \Delta T \cdot \frac{L}{2} \qquad \Delta T := \frac{2 \cdot a}{L \cdot \lambda} = 500 \cdot {}^{\circ}C$$

Una vez que salvamos la deficiencia de montaje debemos retirar la diferencia de temperatura, lo que es equivalente a poner una temperatura de signo contrario en el hiperestático final.



Ahora debemos resolver este hiperestático, que resolveremos por compatibilidad de deformaciones.

$$\Delta L = 0 = \frac{N_1 \cdot L}{A_1 \cdot E} + \frac{N_2 \cdot \frac{L}{2}}{A_2 \cdot E} + \lambda \cdot (-\Delta T) \cdot \frac{L}{2} + \frac{N_3 \cdot L}{A_3 \cdot E}$$

Por equilibro el esfuerzo axil de todas las barras es el mismo. Por lo tanto resulta:

$$\lambda\cdot\Delta T\cdot\frac{L}{2} = \frac{N\cdot L}{E}\cdot\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{2\cdot A_2}+\frac{1}{A_3}\right) \qquad N := \frac{\lambda\cdot\Delta T\cdot\frac{L}{2}\cdot E}{L\cdot\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{2\cdot A_2}+\frac{1}{A_3}\right)} = 78.75\,\mathrm{kN}$$

Las tensiones para cada barra resultan entonces:

$$\sigma_1 := \frac{N}{A_1} = 196.875\cdot\mathrm{MPa} \qquad \sigma_2 := \frac{N}{A_2} = 393.75\cdot\mathrm{MPa} \qquad \sigma_3 := \frac{N}{A_3} = 131.25\cdot\mathrm{MPa}$$

Para calcular las deformaciones de las barras tenemos que hacerlo por para cada etapa de carga y luego suma los estados. Para el primer paso de calentar la barra central:

$$\varepsilon_{1c1} := 0 = 0 \qquad \varepsilon_{2c1} := \lambda\cdot\Delta T = 5\times 10^{-3} \qquad \varepsilon_{3c1} := 0 = 0$$

Para el caso de una diferencia de temperatura negativa aplicada a la barra central en el hiperestático:

$$\varepsilon_{1c2} := \frac{\sigma_1}{E} = 9.375\times 10^{-4} \qquad \varepsilon_{2c2} := \frac{\sigma_2}{E} - \lambda\cdot\Delta T = -3.125\times 10^{-3} \qquad \varepsilon_{3c2} := \frac{\sigma_3}{E} = 6.25\times 10^{-4}$$

Por lo tanto las deformaciones finalmente resultan:

$$\varepsilon_1 := \varepsilon_{1c1} + \varepsilon_{1c2} = 9.375\times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 := \varepsilon_{2c1} + \varepsilon_{2c2} = 1.875\times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_3 := \varepsilon_{3c1} + \varepsilon_{3c2} = 6.25\times 10^{-4}$$

Lo que hubiera sido lo mismo que no tener en cuenta el efecto de la temperatura en primer lugar:

$$\varepsilon_1 := \frac{\sigma_1}{E} = 9.375\times 10^{-4} \qquad \varepsilon_2 := \frac{\sigma_2}{E} = 1.875\times 10^{-3} \qquad \varepsilon_3 := \frac{\sigma_3}{E} = 6.25\times 10^{-4}$$

Finalmente los desplazamientos parciales en los extremos derechos de cada barra, siguiendo la misma nomenclatura para cada paso:

Para el primer y segundo paso de forma separada:

$$u_{1c1} := \varepsilon_{1c1}\cdot L = 0\cdot\mathrm{mm} \qquad u_{2c1} := u_{1c1} + \varepsilon_{2c1}\cdot\frac{L}{2} = 5\cdot\mathrm{mm} \qquad u_{3c1} := u_{2c1} + \varepsilon_{3c1}\cdot L = 5\cdot\mathrm{mm}$$

$$u_{1c2} := \varepsilon_{1c2}\cdot L = 1.875\cdot\mathrm{mm} \qquad u_{2c2} := u_{1c2} + \varepsilon_{2c2}\cdot\frac{L}{2} = -1.25\cdot\mathrm{mm} \qquad u_{3c2} := u_{2c2} + \varepsilon_{3c2}\cdot L = 0\cdot\mathrm{mm}$$

Por lo que el estado final se puede calcular como la suma de los dos pasos o utilizando las deformaciones especificas finales

$$u_1 := u_{1c1} + u_{1c2} = 1.875\cdot\mathrm{mm} \qquad u_2 := u_{2c1} + u_{2c2} = 3.75\cdot\mathrm{mm} \qquad u_3 := u_{3c1} + u_{3c2} = 5\cdot\mathrm{mm}$$

$$u_1 := \varepsilon_1\cdot L = 1.875\cdot\mathrm{mm} \qquad u_2 := u_1 + \varepsilon_2\cdot\frac{L}{2} = 3.75\cdot\mathrm{mm} \qquad u_3 := u_2 + \varepsilon_3\cdot L = 5\cdot\mathrm{mm}$$