

RESOLUCIÓN T2 - ALGEBRA II - 26-07-2017

1) Datos:

$$(i) A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}, \quad (ii) A^T A = \begin{bmatrix} 50 & -14 & 0 \\ -14 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (iii) A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se pide:

a) Hallar una DVS reducida de A

b) Dado $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, hallar la solución del problema de cuadrados mínimos $Ax = b$ de norma mínima.

Resolución 1a) El rango de A (que es igual al de $A^T A$) es 2 (dato (ii)). Por lo tanto, el espacio columna de A está generado por $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ (dato (iii)). Por otra parte:

$$A^T A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & -14 & 0 \\ -14 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 36 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^T A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & -14 & 0 \\ -14 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 64 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A^T A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & -14 & 0 \\ -14 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \text{ por lo tanto: } A = \overbrace{U_r}^{4 \times 2} \overbrace{\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}}^{\Sigma_r} \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}}^{V_r^T}.$$

Las dos columnas de U_r son los vectores $Acol_1(V_r)$ y $Acol_2(V_r)$, o - equivalentemente - , los vectores

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + A \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{=0} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \stackrel{(iii)}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(recordar que $Nul(A) = Nul(A^T A)$)

Es decir: $U_r = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Por lo tanto:

$$A = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}^{U_r} \overbrace{\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}}^{\Sigma_r} \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}}^{V_r^T} = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}^{U_r} \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{8}{\sqrt{2}} & \frac{-8}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{6}{\sqrt{2}} & \frac{6}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}}^{\Sigma_r V_r^T} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(El cálculo de A no hace falta; hemos exhibido la DVS solicitada y además la misma matriz A , para que se pueda comprobar fácilmente que esta matriz cumple con las condiciones del enunciado).

Resolución 1b) De la DVS obtenida tenemos

$$\begin{aligned} A^+ &= V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{8\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{8\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{6\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{12} & \frac{1}{16} & \frac{1}{12} \\ \frac{-1}{16} & \frac{1}{12} & \frac{-1}{16} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la respuesta es

$$A^+ b = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{12} & \frac{1}{16} & \frac{1}{12} \\ \frac{-1}{16} & \frac{1}{12} & \frac{-1}{16} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2) Datos:

(i) $A \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ simétrica definida positiva

$$(ii) A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(iii) $\det(A) = 12$ y $\text{tr}(A) = 7$

Se pide:

a) Hallar los extremos de $\{x^T A x : \|x\| = 2\}$ y los puntos donde se alcanzan dichos extremos

b) Demuestre que si $x \in \mathfrak{R}^3$ verifica $x^T A x = 1$, entonces $\|x\|^2 \geq \frac{1}{3}$

Resolución 2a): De (i) se tiene que los autovalores de A son reales positivos. De (ii), que un autovalor es $\lambda_1 = 3$. De (iii) se tienen las ecuaciones para los autovalores restantes: $3\lambda_2\lambda_3 = 12$ y $3 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7$, es decir:

$$\begin{cases} \lambda_2\lambda_3 = 4 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 4 \end{cases}$$

Sustituyendo $\lambda_3 = 4 - \lambda_2$ en la primera ecuación tenemos $\lambda_2(4 - \lambda_2) = 4$, es decir: $0 = 4 - 4\lambda_2 + \lambda_2^2 = (\lambda_2 - 2)^2$. Por lo tanto, los autovalores son $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Por ser $A \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ simétrica resulta entonces que

$$S_3(A) \stackrel{(ii)}{=} \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad S_2(A) = S_3(A)^\perp = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Normalizando los autovectores exhibidos (que son ortogonales):

$$\tilde{u}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

obtenemos una base ortonormal de \mathfrak{R}^3 para la cual $A\tilde{u}_1 = 3\tilde{u}_1$, $A\tilde{u}_2 = 2\tilde{u}_2$ y $A\tilde{u}_3 = 2\tilde{u}_3$. Obsérvese que la matriz A es, entonces:

$$A = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}}^U \overbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}^D \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}}^{U^T}$$

Pero no es necesario hacer la cuenta. Las desigualdades de Rayleigh son, en nuestro caso:

$$2\|x\|^2 \leq x^T A x \leq 3\|x\|^2$$

y por lo tanto (en clase se ha demostrado que estas cotas son los extremos):

► $\min \{ x^T A x : \|x\| = 2 \} = 8$ y se alcanza en los puntos

$$\alpha \tilde{u}_2 + \beta \tilde{u}_3 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ donde } \alpha^2 + \beta^2 = 4$$

(es decir: en los puntos de $S_2(A)$ de norma 2)

► $\max \{ x^T A x : \|x\| = 2 \} = 12$ y se alcanza en los puntos $2\tilde{u}_1 = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $-2\tilde{u}_1 = -\frac{2}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Resolución 2b): de las desigualdades de Rayleigh, $2\|x\|^2 \leq x^T A x \leq 3\|x\|^2$, se tiene que si $x^T A x = 1$, entonces $2\|x\|^2 \leq 1 \leq 3\|x\|^2$, y la segunda desigualdad equivale a $\|x\|^2 \geq \frac{1}{3}$.

Idea geométrica: Dado $x = y_1\tilde{u}_1 + y_2\tilde{u}_2 + y_3\tilde{u}_3$ (es decir: $x = Uy$), por ser $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3$ una base ortonormal, tenemos $\|x\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \|y\|^2$ y además, por ser $A\tilde{u}_1 = 3\tilde{u}_1$, $A\tilde{u}_2 = 2\tilde{u}_2$ y $A\tilde{u}_3 = 2\tilde{u}_3$: $x^T A x = 3y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$. El conjunto $\{x \in \mathfrak{R}^3 : x^T A x = 1\}$ es, entonces, el elipsoide de ecuación $3y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 = 1$ (en las coordenadas $y = U^T x$). Se trata de un elipsoide de revolución de semiejes $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Se deduce inmediatamente que los puntos del elipsoide más cercanos al origen (es decir: los de norma mínima) son los vértices $\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{u}_1$ y $-\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{u}_1$. Puesto que estos puntos tienen norma $\frac{1}{\sqrt{3}}$, para cualquier otro punto x de elipsoide se tiene que $\|x\| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$

3) Datos: $C^2(\mathfrak{R}) \xrightarrow{T} C^1(\mathfrak{R}) \xrightarrow{L} C^0(\mathfrak{R})$, $L(f) = f' + af$, $T(f) = f' + f$.

Se pide:

a) Hallar a tal que $Nu(L \circ T) = \text{gen}\{y_1, y_2\}$ donde $y_1(t) = e^{-t}$, $y_2(t) = te^{-t}$ para todo $t \in \mathfrak{R}$.

b) Para $a = 2$, hallar todas las $f \in C^2(\mathfrak{R})$ tales que $L(f)(t) = e^{-2t} + t$ para todo $t \in \mathfrak{R}$.

Resolución 3a): Explícitamente tenemos

$$(L \circ T)(f) = L(T(f)) = L(f' + f) = (f' + f)' + b(f' + f) = f'' + (a + 1)f' + af.$$

Por lo tanto $f \in Nu(L \circ T) \Leftrightarrow f'' + (b + 1)f' + bf = 0$. La ecuación característica de esta ecuación diferencial es $\lambda^2 + (a + 1)\lambda + a = 0$. El espacio de soluciones dado en el enunciado corresponde a una raíz doble, lo que implica que $a = 1$ (condición necesaria y suficiente: la raíz doble de $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$ es -1 y una base del espacio de soluciones es e^{-t} , te^{-t}).

Observación: el operador $L \circ T$ ya está factorizado. Por lo tanto el problema se puede resolver, también, de la siguiente manera:

$$(L \circ T)(f) = 0 \Leftrightarrow T(f)' + aT(f) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathfrak{R} : T(f)(t) = c_1 e^{-at} \Leftrightarrow \forall t \in \mathfrak{R} : f'(t) + f(t) = c_1 e^{-at}$$

(etc)

$$\textbf{Resolución 3b): } \forall t \in \mathfrak{R} : L(f)(t) = e^{-2t} + t \Leftrightarrow \forall t \in \mathfrak{R} : f'(t) + 2f(t) = e^{-2t} + t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathfrak{R} : f'(t)e^{2t} + 2f(t)e^{2t} = 1 + te^{2t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathfrak{R} : [f(t)e^{2t}]' = 1 + te^{2t} \Leftrightarrow \forall t \in \mathfrak{R} : [f(t)e^{2t}]' = [t + \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t}]' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathfrak{R} : f(t)e^{2t} = t + \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} + c \Leftrightarrow \forall t \in \mathfrak{R} : f(t) = te^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + ce^{-2t}$$

donde c es una constante real arbitraria.

4) Datos:

(i) $A \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ simétrica e indefinida, (ii) $A^2 + 3A + 2I = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$, (iii) $\det(A) = -8$

Se pide resolver el problema
$$\begin{cases} X' = (A^2 - 4I)X \\ X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Observación: siendo A una matriz real simétrica de orden 2, sus dos autovalores son reales. Puesto que el producto de estos dos autovalores es el determinante, por la condición (iii) resulta que estos dos autovalores tienen signos contrarios y entonces A es necesariamente definida positiva.

Resolución 4): La matriz $P(A) = A^2 + 3A + 2I = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ tiene los mismos autovectores

que A (pensarlo: ambas son diagonalizables ortogonalmente, y dos autovectores de A linealmente independientes son también autovectores de $P(A)$, que no puede tener más que dos autovectores linealmente independientes ...).

Ahora bien: $\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 12 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, de donde resulta:

$$\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}^U \overbrace{\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}}^{D_p} \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}^{U^T}$$

Por lo tanto, $A = UDU^T$, donde $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ verifica (condición (ii))

$$U(D^2 + 3D + 2I)U^T = UD_pU^T$$

Dado que U es inversible, esto equivale a $D^2 + 3D + 2I = D_p = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$, es decir

$\lambda_1^2 + 3\lambda_1 + 2 = 6$ y $\lambda_2^2 + 3\lambda_2 + 2 = 12$. Las ecuaciones son entonces: $\lambda_1^2 + 3\lambda_1 - 4 = 0$ y $\lambda_2^2 + 3\lambda_2 - 10 = 0$. Las soluciones de la primera son 1 y -4, y las de la segunda: 2 y -5. Puesto

que $\lambda_1\lambda_2 = \det(A) = -8$, la única posibilidad es $\lambda_1 = -4$ y $\lambda_2 = 2$. Tenemos entonces:

$$A = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}^U \overbrace{\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}^D \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}^{U^T}$$

Resulta

$$A^2 - 4I = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}^U \overbrace{\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{D^2-I} \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}^{U^T}$$

y la solución general del sistema $X' = (A^2 - 4I)X$ es $X(t) = c_1 e^{12t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Finalmente,

$$X(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow c_1 = 0, c_2 = 1 \text{ y la (única) solución del problema es}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ (cte)}$$
