

EXAMEN INTEGRADOR

18 de febrero 2015 (4ª fecha diciembre-febrero)

TEMA 1

RESOLUCIÓN

Aclaración: El alumno debe tener presente que siempre hay más de una forma correcta de resolver un ejercicio. La resolución aquí presentada es una de las tantas posibles.

♠-----♠

EJERCICIO 1) Sea $f \in L(P_2)$ tal que $[f]_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2\alpha - 1 \\ 1 & 3 & 2\alpha - 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, donde $B = \{p_0, p_1, p_2\}$ es la base

de P_2 dada por $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$ y $p_2(t) = t^2$. Hallar los valores de α para los que f resulta diagonalizable y para estos valores hallar los autovalores y los autoespacios de f .

RESOLUCIÓN : Se trata de determinar los valores de α para los cuales la matriz

$$A = [f]_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2\alpha - 1 \\ 1 & 3 & 2\alpha - 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es diagonalizable (en \mathbb{R}). El polinomio característico:

$$\begin{aligned} \text{Det}(\lambda I - A) &= \text{Det} \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 & 1 - 2\alpha \\ -1 & \lambda - 3 & 1 - 2\alpha \\ 0 & 0 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = (\lambda - 4) \text{Det} \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = \\ &= (\lambda - 4)[(\lambda - 3)^2 - 1] = (\lambda - 4)(\lambda - 3 - 1)(\lambda - 3 + 1) = (\lambda - 4)^2(\lambda - 2) \end{aligned}$$

Es decir: cualquiera sea $\alpha \in \mathbb{R}$, el polinomio característico de A se factoriza linealmente en \mathbb{R} , siendo los autovalores de A (y por lo tanto de f) $\lambda_1 = 2$ con multiplicidad algebraica 1 y $\lambda_2 = 4$ con multiplicidad algebraica 2. Por lo tanto, A es diagonalizable sii la multiplicidad geométrica de $\lambda_2 = 4$ es 2, es decir, si el espacio nulo de la matriz

$$4I - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 - 2\alpha \\ -1 & 1 & 1 - 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tiene dimensión 2. Equivalentemente (teorema de la dimensión): su rango tiene que ser $= 1$. Para que las dos primeras filas sean linealmente dependientes, debe ser necesariamente $1 - 2\alpha = -(1 - 2\alpha)$, es decir: $\alpha = \frac{1}{2}$, único valor de α para que f sea diagonalizable. Ahora, para $\alpha = \frac{1}{2}$ es

$$A = [f]_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

y se obtienen fácilmente tres autovectores l.i.:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto los autoespacios de f son

$$S_2(f) = \{ -p_0 + p_1 \} \quad , \quad S_4(f) = \{ p_0 + p_1, p_2 \}$$

EJERCICIO 2:

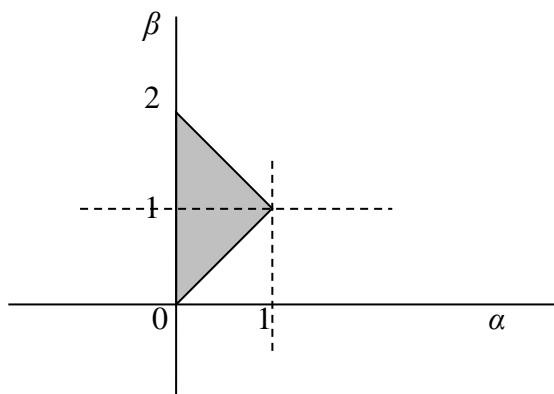
(a) Dada la forma cuadrática $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = \beta x_1^2 + 2\alpha x_1 x_2 + \beta x_2^2$, con $\alpha \geq 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$, graficar el conjunto de pares (α, β) para los cuales Q verifica la condición $0 \leq Q(x) \leq 2\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$.

(b) Considere la forma cuadrática definida en (a) con $\alpha = 1$ y $\beta = 2$. Halle, entre los x tales que $\|x\| = 3$, aquellos que hacen mínimo el valor de $Q(x)$.

RESOLUCIÓN (a): La matriz de la forma cuadrática es $M = \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$ y se tiene:

$$\text{Det}(\lambda I - M) = \text{Det} \begin{bmatrix} \lambda - \beta & -\alpha \\ -\alpha & \lambda - \beta \end{bmatrix} = (\lambda - \beta)^2 - \alpha^2 = [\lambda - (\beta - \alpha)][\lambda - (\beta + \alpha)]$$

Por lo tanto sus autovalores son $\lambda_1 = \beta - \alpha$ y $\lambda_2 = \beta + \alpha$. Obsérvese que por ser $\alpha \geq 0$ es $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Por el Teorema de Rayleigh: $\forall x \neq 0: \lambda_1 \leq \frac{Q(x)}{\|x\|^2} \leq \lambda_2$, la condición requerida equivale a $0 \leq \lambda_1 = \beta - \alpha \leq \beta + \alpha \leq \lambda_2 \leq 2$.



RESOLUCIÓN (b): Para $\alpha = 1$ y $\beta = 2$ se tiene $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = \beta - \alpha = 1$ y $\lambda_2 = \beta + \alpha = 3$.

Los autovectores correspondientes al menor autovalor es $\mu(-1,1)^T$, $\mu \in \mathfrak{R} - \{0\}$, pues $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Entre éstos, debe buscarse los de norma = 3, y entonces las soluciones son $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}\right)^T$, $\left(\frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^T$.

EJERCICIO 3: Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, hallar $B \in \mathfrak{R}^{2 \times 3}$ tal que $BA = 0$ y $\max\{\|Bx\| : \|x\| = 1\} = 3$

RESOLUCIÓN: Puesto que los dos últimos factores matriciales de A son inversibles, la condición

$BA = 0$ equivale a $B \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y por lo tanto, B debe ser de la forma $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$. Por

otra parte, $\|Bx\|^2 = (Bx, Bx) = (B^T Bx, x)$, donde

$B^T B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$. La condición requerida equivale a que el mayor

autovalor de esta matriz sea = 9, es decir: $a^2 + b^2 = 9$. Puede elegirse, por ejemplo,

$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Obsérvese que en este caso, efectivamente se verifica

$\forall x \in \mathfrak{R}^3 : \|Bx\| = |3x_3| = 3|x_3| \leq 3\|x\|$, siendo, además, $\|Be_3\| = 3$.

EJERCICIO 4: Considere el sistema $X' = \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix} X$

(a) Hallar los $\alpha \in \mathfrak{R}$ para los cuales toda solución $X(t)$ del sistema satisface $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$

(b) Para $\alpha = 3$, resuelva el problema de valores iniciales con $X(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

RESOLUCIÓN (a): La matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix}$ se diagonaliza ortogonalmente

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+2 & 0 \\ 0 & \alpha-2 \end{bmatrix} = D$$

Por lo tanto, $X' = AX \Leftrightarrow X' = Q D Q^T X \Leftrightarrow Q^T X' = D Q^T X \Leftrightarrow Y' = D Y$, donde hemos puesto $Y = Q^T X$; obsérvese que por ser Q matriz ortogonal, es $\|Y\| = \|X\|$. Resolviendo

$$Y' = D Y \Leftrightarrow \begin{cases} (1) y_1' = (\alpha+2)y_1 \\ (2) y_2' = (\alpha-2)y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) y_1 = c_1 e^{(\alpha+2)t} \\ (2) y_2 = c_2 e^{(\alpha-2)t} \end{cases} \Leftrightarrow Y = \begin{bmatrix} c_1 e^{(\alpha+2)t} \\ c_2 e^{(\alpha-2)t} \end{bmatrix}$$

Entonces, $\|X\| = \|Y\| = \sqrt{c_1^2 e^{2(\alpha+2)t} + c_2^2 e^{2(\alpha-2)t}}$, por lo tanto, para que se verifique $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = 0$ para todos $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, debe ser $\alpha < -2$ (condición necesaria y suficiente).

RESOLUCIÓN (b): De los cálculos hechos en (a), se tiene, para $\alpha = 3$,

$$X(t) = Q Y(t) = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{5t} - \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^t \\ \frac{c_1}{\sqrt{2}} e^{5t} + \frac{c_2}{\sqrt{2}} e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 e^{5t} - k_2 e^t \\ k_1 e^{5t} + k_2 e^t \end{bmatrix}. \text{ Resulta}$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} k_1 - k_2 \\ k_1 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow k_1 = 2 \quad \wedge \quad k_2 = -1$$

Por lo tanto la respuesta es $X(t) = \begin{bmatrix} 2e^{5t} - e^t \\ 2e^{5t} + e^t \end{bmatrix}$.

EJERCICIO 5: Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Existe una matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ simétrica tal que $\text{Det}(\lambda I - A) = \lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda$ y tal que $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ son autovectores de A .

(b) Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica y $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz ortogonal, entonces los autovalores de A coinciden con los valores singulares de PA .

RESOLUCIÓN 5 (a) Falsa: Dos autovectores de una matriz real simétrica asociados a autovalores distintos son ortogonales. Los vectores $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ son linealmente independientes pero no son ortogonales y por lo tanto tienen que estar asociados a un mismo autovalor de A que necesariamente, entonces, debe tener multiplicidad mayor que 1. Pero

$$\text{Det}(\lambda I - A) = \lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda = \lambda(\lambda^2 - \lambda - 6) = \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 2)$$

lo que significa que A tiene tres autovalores simples. (Si usted no analizó esto y simplemente afirmó que la proposición es falsa porque $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ no son ortogonales, su respuesta se considera incorrecta. Por ejemplo: estos vectores son autovectores de la matriz real simétrica I).

RESOLUCIÓN 5 (a) Falsa: Por ejemplo: si $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, los valores singulares de PA son las raíces cuadradas de los autovalores de $(PA)^T PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, es decir: 1 y 2, y ninguno de estos números es autovalor de A .

♣-----♣